２０２２年　東北大学前期日程試験【　　数学　　】解答例

1

$\ell = 2\ell' + 1,\ m = 2m' + 1,\ n = 2n' + 1$ とおくと $l',\ m',\ n'$ は 0 以上の整数で $l' + m' + n' = \dfrac{K-3}{2}$ を満たす.

(1) $l' + m' + n' = 48$ であり, n' を $0 \leqq n' \leqq 48$ を満たす整数とすると $l' + m' = 48 - n'$ を満たす (l', m') の組は

$$(l', m') = (i, 48 - n' - i)\ (0 \leqq i \leqq 48 - n')$$

の $49 - n'$ 個. よって (l', m', n') の組の総数 N は

$$N = \sum_{n'=0}^{48} (49 - n') = \frac{1}{2} 49 \cdot 50 = 1225$$

(2) $l' = m'$ を満たす組は

$$(l', m', n') = (i, i, 48 - 2i)\ (0 \leqq i \leqq 24)$$

の 25 個. このうち $(l', m', n') = (16, 16, 16)$ 以外の 24 個は l', m', n' の並び替えで条件を満たす組が 3 個ずつ得られるので, 総数は $24 \times 3 + 1 = 73$ 個.

(3) (1) と同様にして

$$N = \sum_{n'=0}^{(K-3)/2} \left(\frac{K-1}{2} - n' \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{K-1}{2} \cdot \frac{K+1}{2} = \frac{K^2-1}{8}$$

より

$$N > K \Longleftrightarrow \frac{K^2 - 8K - 1}{8} > 0 \Longleftrightarrow K < 4 - \sqrt{17},\ K > 4 + \sqrt{17}$$

よってこれを満たす 3 以上の奇数 K の最小値は 9.

2

(1) $g(x)=x^2+3x+a$ とおく。$(x+1)^2 \geqq 0$ だから、$g(x)<0$ かつ $x \neq -1$ となる x が存在すればよい。よって、$g(x)=0$ の判別式を D として

$$D=9-4a>0 \quad \therefore\ a<\frac{9}{4}$$

(2) $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x+3)(x+1)^2+2(x^2+3x+a)(x+1)\\&=(x+1)\{(2x+3)(x+1)+2(x^2+3x+a)\}\\&=(x+1)(4x^2+11x+2a+3)\end{aligned}$$

ここで、$h(x)=4x^2+11x+2a+3$ とおくと

$$h(-1)=2(a-2)<0$$

となり、$h(x)=0$ の２解を $\alpha_1,\ \alpha_2\ (\alpha_1<\alpha_2)$ とおくと

$$\alpha_1<-1<\alpha_2$$

であり、確かに $f(x)$ は $x=\alpha_1,\ \alpha_2$ で極小値をとる。

次に、$\alpha_2=-1+p\ (p>0)$ とすると、$\alpha_1,\ \alpha_2$ は $x=-\frac{11}{8}<-1$ に関して対称だから、$\alpha_1<-1-p$ である。

$$f(x)=(x+1)^4+(x+1)^3+(a-2)(x+1)^2$$

と変形できて

$$\begin{cases}f(-1+p)=p^4+p^3+(a-2)p^4\\f(-1-p)=p^4-p^3+(a-2)p^4\end{cases}$$

$a-2<0,\ p>0$ とあわせて

$$f(\alpha_2)=f(-1+p)>f(-1-p)>f(\alpha_1)$$

(3) (2) の $h(x)$ に対して、$h(x)=0$ の判別式を E とおくと

$$E=11^2-16(2a+3)=73-32a$$

また、(2) と同様に $\alpha_1,\ \alpha_2$ を定める。

(i) $a \geqq \frac{73}{32}$ のとき、$E \leqq 0$ となり $f(x)$ は $x=-1$ で極小かつ最小となるから、$\beta=-1$ とすれば適する。

(ii) $\frac{9}{4}<a<\frac{73}{32}$ のとき、$E>0,\ f(-1)>0$ より $\alpha_1<\alpha_2<-1$ となる。よって $\beta=\alpha_1$ となるが、(1) より $f(\alpha_1)>0$ だから最小にならないから適さない。

(iii) $2<a \leqq \frac{9}{4}$ のとき、(ii) と同様に $\alpha_1<\alpha_2<-1$ となる。(1) より $f(\alpha_1) \leqq 0$ だから $f(\alpha_1)$ が最小となり適する。

(iv) $a=2$ のとき

$$f'(x)=(x+1)^2(4x+7) \quad \therefore\ x=-\frac{7}{4}\ \text{で極小かつ最小となる}$$

よって、$\beta=-\frac{7}{4}$ とすれば適する。

(v) $a<2$ のとき、(2) から $\beta=\alpha_1$ とすれば適する。

以上から、条件を満たす a のとり得る値の範囲は $a \leqq \frac{9}{4},\ a \geqq \frac{73}{32}$ である。

２０２２年　東北大学前期日程試験【　数学　】解答例

$\boxed{3}$ (1) $\dfrac{2+2x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x} \leqq \dfrac{x+2}{2}$ を示せばよい. $x>0$ のときこれらの式はすべて正の値をとるので, それぞれ２乗して

$$\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^2 \leqq 1+x \leqq \left(\frac{x+2}{2}\right)^2$$

を示せばよい.

$$1+x-\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^2 = \frac{(1+x)x^2}{(2+x)^2} > 0$$

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 - (1+x) = \frac{x^2}{4} > 0$$

よって示された.

(2) (1) より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \leqq S_n \leqq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{4n}$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{n}{n^2}} = \frac{n+1}{4n+2}$$

であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4}$ とはさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$.

(別解) $\boxed{3}$

(1) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \sqrt{1+x} + 1$ とおくと，$x>0$ のとき，

$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right) > 0$ より，

$f(x)$ は $x \geqq 0$ で単調増加であり，$f(0)=0$ ゆえ，$x>0$ で $f(x)>0$ となる。

一方，$\dfrac{x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x}-1 \iff \dfrac{2+2x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x}$ より，$t=\sqrt{1+x}$ とおくと，

示すべき式は，$t>1$ のとき，$\dfrac{2t^2}{t^2+1} \leqq t$ つまり，$t^3-2t^2+t \geqq 0$ となるが，

これは，左辺 $=t(t-1)^2 \geqq 0$ より明らかになり立つ。

よって，$x>0$ のとき，$\dfrac{x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x}-1 \leqq \dfrac{x}{2}$ が示された。

(2) (1) の不等式において，$x=\dfrac{k}{n^2}$ とおくと，$x>0$ を満たすので，

$\dfrac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \leqq \sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1 \leqq \dfrac{k}{2n^2}$ となり，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \leqq \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$ となる。つまり，

$\displaystyle T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}},\ U_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$ とおくと，$T_n \leqq S_n \leqq U_n$ となる。

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{4}$

また，$\displaystyle 0 \leqq U_n - T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n^2}-\frac{k}{2n^2+k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}$

$\displaystyle \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(2n^2+k)} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4n} \to 0\ (n\to\infty)$ より，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{4}$　よって，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$ となる。

$\boxed{3}$ (別解2)

(1) $f(x)=\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2+x}$ $(x>0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{2}{(2+x)^2}=\frac{(2+x)^2-4\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\,(2+x)^2}$$
$$=\frac{(2+x)^4-16(1+x)}{2\sqrt{1+x}\,(2+x)^2\{(2+x)^2+4\sqrt{1+x}\}}$$

ここで、$g(x)=(2+x)^4-16(1+x)$ $(x>0)$ とおくと

$$g'(x)=4(2+x)^3-16=4\{(2+x)^3-4\}>0\ (x>0)$$

よって、$g(x)$ は単調増加で

$$g(x)>g(0)=0\ (x>0)\quad \therefore\ f'(x)>0\ (x>0)$$

よって、$f(x)$ も単調増加となり

$$f(x)>f(0)=0\ (x>0)\quad \therefore\ \frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\ (x>0)$$

次に、$h(x)=\dfrac{x}{2}+1-\sqrt{1+x}$ $(x>0)$ とおくと

$$h'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}$$
$$=\frac{x}{2\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)}>0\ (x>0)$$

よって、$h(x)$ は単調増加となり

$$h(x)>h(0)=0\ (x>0)\quad \therefore\ \sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}\ (x>0)$$

(2) $\dfrac{k}{n^2}>0$ より、(1) において $x=\dfrac{k}{n^2}$ とおける。また、$1\leqq k\leqq n$ より

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}\leqq\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\quad \therefore\ \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}\leqq\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\leqq\frac{k}{2n^2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2+\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}<S_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}\quad \therefore\ \frac{n+1}{2(2n+1)}<S_n<\frac{n+1}{4n}$$

よって、はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$ である。

4

(1) 直線 $y=tx$ は x 軸と直線 $y=mx$ のなす角の二等分線となるので, $t=\tan\theta$ とすれば $m=\tan 2\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$. よって $mt^2+2t-m=0$ と $t>0$ より $t=\dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}$.

(2) 直線 ℓ と x 軸および円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円を C' とする. 円 C の中心と原点の距離は $a\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}$ で与えられるので, 円 C の中心と円 C' の中心との距離を考えると

$$(b-a)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=a+b$$

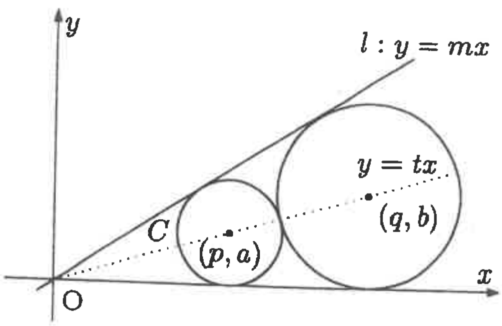
よって

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-1}=2t^2+1+2t\sqrt{t^2+1}$$

(3) 明らかに $m\to+0$ のとき $t\to+0$ であり, $m=\dfrac{2t}{1-t^2}$ と (2) より

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)&=\lim_{t\to+0}\frac{1-t^2}{2t}\left(2t^2+2t\sqrt{t^2+1}\right)\\&=\lim_{t\to+0}(1-t^2)(t+\sqrt{t^2+1})\\&=1\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (別解)



(1) C の中心は $(p,\ a)$ $(p>0)$ とおけて、中心は l の下側だから $a<mp$ を満たす。
このとき、条件は

$$\frac{|a-mp|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{mp-a}{\sqrt{m^2+1}}=a \therefore\ mp=(\sqrt{m^2+1}+1)a$$

$$\therefore\ t=\frac{a}{p}=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}+1}$$

(2) 半径 b の円の中心は $(q,\ b)$ $(q>p)$ とおけて、C に外接することから

$$(q-p)^2+(b-a)^2=(a+b)^2 \Longleftrightarrow q-p=2\sqrt{ab}$$

ここで、(1) の結果から

$$\therefore\ q-p=\frac{b}{t}-\frac{a}{t}=\frac{b-a}{t}$$

$$\therefore\ b-a=2\sqrt{ab}\,t \quad \therefore\ \frac{b}{a}-2\sqrt{\frac{b}{a}}\,t-1=0$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{b}{a}}=t+\sqrt{t^2+1}\ (\because \frac{b}{a}>0)$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=(t+\sqrt{t^2+1})^2=2t^2+1+2t\sqrt{t^2+1}$$

(3) (1), (2) から

$$\frac{b}{a}-1=2t^2+2t\sqrt{t^2+1}=2t(t+\sqrt{t^2+1})$$

$$\therefore\ \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\frac{1}{t(\sqrt{m^2+1}+1)}\cdot 2t(t+\sqrt{t^2+1})=\frac{2(t+\sqrt{t^2+1})}{\sqrt{m^2+1}+1}$$

(1) より、$m\to+0$ のとき $t\to+0$ だから

$$\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\lim_{m\to+0}\frac{2(t+\sqrt{t^2+1})}{\sqrt{m^2+1}+1}=1$$

5

(1) $\mathrm{A_kB_k} \perp \ell'$ より，$(t_k\vec{b}+\vec{c}-s_k\vec{a})\cdot\vec{b}=0\cdots$①

$\mathrm{B_kA_{k+1}} \perp \ell$ より，$(t_k\vec{b}+\vec{c}-s_{k+1}\vec{a})\cdot\vec{a}=0\cdots$②

ここで，$|\vec{a}|^2=6,\ |\vec{b}|^2=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=-1,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=1$ より，

①，②は，$3t_k-2s_k-1=0,\ 2t_k-6s_{k+1}+1=0$ となる。

2 式から t_k を消去して，$18s_{k+1}=4s_k+5$ より，$s_{k+1}=\dfrac{2}{9}s_k+\dfrac{5}{18}$ となる。

(2) (1) より，$s_{k+1}-\dfrac{5}{14}=\dfrac{2}{9}\left(s_k-\dfrac{5}{14}\right)$

よって，数列 $\left\{s_k-\dfrac{5}{14}\right\}$ は，公比 $\dfrac{2}{9}$ の等比数列となり，

$s_n-\dfrac{5}{14}=\left(s_1-\dfrac{5}{14}\right)\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$ より，$S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=\dfrac{5}{14}$

また，(1) より $3t_k-2s_k-1=0$ ゆえ，$t_n=\dfrac{2}{3}s_n+\dfrac{1}{3}$

よって，$T=\displaystyle\lim_{n\to\infty}t_n=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{14}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{7}$

(3) $\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{14}\vec{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\right)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}-\dfrac{5}{14}\vec{a}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{a}=\dfrac{4}{7}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\dfrac{5}{14}|\vec{a}|^2=\dfrac{8}{7}+1-\dfrac{15}{7}=0$ となり，

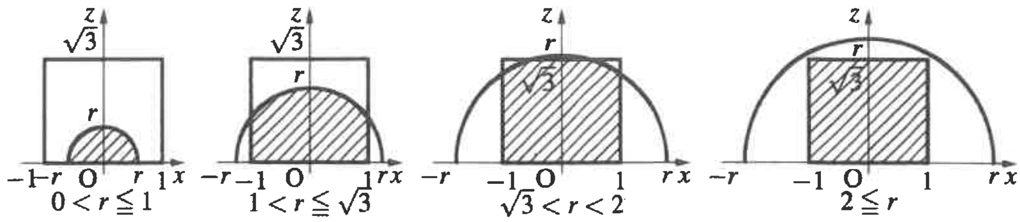
ℓ の方向ベクトルは $\vec{a}$ ゆえ，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\ell$ がわかる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{b}=\dfrac{4}{7}|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\dfrac{5}{14}\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{12}{7}-1-\dfrac{5}{7}=0$ であり，

ℓ' の方向ベクトルは $\vec{b}$ ゆえ，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\ell'$ がわかる。

6

円柱の底面が xy 平面上にあって原点が中心であるとすると, 円柱の軸を含む平面による断面は



よって $0<r\leqq 1$ のとき半径 r の球の体積の半分なので $V(r)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\pi}{3}r^3=\dfrac{2\pi}{3}r^3$

$1<r\leqq\sqrt{3}$ のとき

$$\begin{aligned}V(r)&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{r}(r^2-z^2)dz\\&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\left[r^2z-\frac{z^3}{3}\right]_{\sqrt{r^2-1}}^{r}\\&=\frac{2}{3}\pi\left\{r^3-(r^2-1)\sqrt{r^2-1}\right\}\end{aligned}$$

$\sqrt{3}<r<2$ のとき

$$\begin{aligned}V(r)&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}}(r^2-z^2)dz\\&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\left[r^2z-\frac{z^3}{3}\right]_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}}\\&=\pi\left\{\sqrt{3}(r^2-1)-\frac{2(r^2-1)\sqrt{r^2-1}}{3}\right\}\end{aligned}$$

$2\leqq r$ のとき円柱の体積なので $V(r)=\sqrt{3}\pi$

以上より $V(r)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{3}r^3 & (0<r\leqq 1)\\ \dfrac{2}{3}\pi\left\{r^3-(r^2-1)\sqrt{r^2-1}\right\} & (1<r\leqq\sqrt{3})\\ \pi\left\{\sqrt{3}(r^2-1)-\dfrac{2(r^2-1)\sqrt{r^2-1}}{3}\right\} & (\sqrt{3}<r<2)\\ \sqrt{3}\pi & (2\leqq r)\end{cases}$