２０２２年　東北大学前期日程試験【　数学　】解答例

$\boxed{1}$
(別解)

(1) $a,\ b,\ c$ を 0 以上の整数として

$$l=2a+1,\ m=2b+1,\ n=2c+1$$

とおくと、条件は

$$l+m+n=99 \iff a+b+c=48$$

$$\therefore\ N={}_3\mathrm{H}_{48}={}_{50}\mathrm{C}_{48}=\frac{50\cdot 49}{2}=1225$$

(2) (i) (1) において、$a=b=c$ とすると

$$(a,\ b,\ c)=(16,\ 16,\ 16)$$

(ii) $a=b\neq c$ とすると

$$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 48),\ (1,\ 1,\ 46),\ \cdots,\ (24,\ 24,\ 0)$$

(i) の場合を除いて 24 通りあり、それぞれ 3 通りずつあることから

$$24\cdot 3=72\ \text{個}$$

である。

(i)、(ii) を合わせて $1+72=73$ 個である。

(3) $K=3,\ 5,\ 7,\ 9$ のとき、それぞれ

$$N=1,\ 3,\ 6,\ 10$$

よって、$N>K$ となる最小の K は 9 である。

$\boxed{2}$

(1) $0 \leqq t \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$|x^2 - t^2| = (x+t)|x-t| = \begin{cases} t^2 - x^2 & (0 \leqq x \leqq t) \\ x^2 - t^2 & (t \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ F(t) &= \int_0^t (t^2 - x^2)\,dx + \int_t^1 (x^2 - t^2)\,dx \\ &= \left[t^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3} - t^2x\right]_t^1 \\ &= 2\left(t^3 - \frac{t^3}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - t^2\right) \\ &= \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき、(1) より

$$F'(t) = 4t^2 - 2t = 2t(2t-1)$$

$t \geqq 1$ のとき

$$F(t) = \int_0^1 (t^2 - x^2)\,dx = \left[t^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = t^2 - \frac{1}{3}$$

となり、$F(t)$ は単調増加となる。よって、$t \geqq 0$ における増減表は次の通り。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$F(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$$\therefore\ T = \frac{1}{2},\ F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$\boxed{3}$

(1) $a>0,\ b>0$ より、範囲 D は

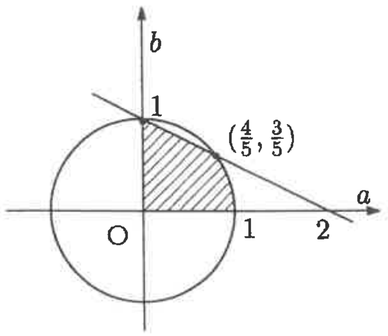
$$\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \geqq 2,\ y=\frac{2-a}{b} \geqq 2 \iff a^2+b^2 \leqq 1,\ a+2b \leqq 2$$

ここで、$a^2+b^2=1$ と $a+2b=2$ の交点は

$$4(1-b)^2+b^2=1 \iff 5b^2-8b+3=(b-1)(5b-3)=0$$

$$\therefore\ (0,\ 1),\ \left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

であり、図の斜線部になる。ただし、a 軸上、b 軸上の境界は含まず、他の境界を含む。



(2) $3a+2b=k \iff b=-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{k}{2}$ とおく。また、$a^2+b^2=1$ 上の $\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ における接線は

$$4a+3b=5 \iff b=-\frac{4}{3}a+\frac{5}{3}$$

$-\dfrac{3}{2}<-\dfrac{4}{3}$ より、最大は $3a+2b=k$ と $a^2+b^2=1$ が接するときである。接点は、$2a-3b=0$ と $a^2+b^2=1$ の交点のうち第１象限の点で

$$(a,\ b)=\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \text{ で、最大値 } \sqrt{13}$$

4

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(a, b, c)\ (a>0)$ とおく。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=1$ より，$a^2+b^2+c^2=1\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c=0\cdots$②

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\sqrt{3}a+c=0\cdots$③

②，③より，$b=-2\sqrt{2}a,\ c=\sqrt{3}a$ を①に代入して，

$12a^2=1$ より，$a=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

(2) 求める距離を h とおくと，$h=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S は,

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\sqrt{6}$

よって，求める体積 V は，$V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$