２０２１年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

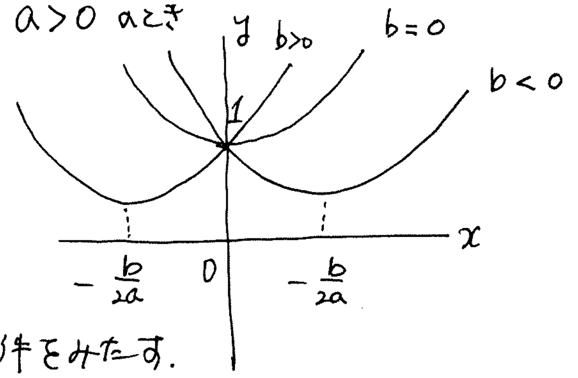
$\boxed{1}$

$$y = ax^2 + bx + 1$$

(i) $a=0,\ b=0$ のとき $y=1$ となり x軸と交わらない（条件をみたす）

(ii) $a=0,\ b\neq 0$ のとき $y=bx+1$，条件をみたすのは $b>0$

(iii) $a\neq 0$ のとき (ア) $a>0$ のとき

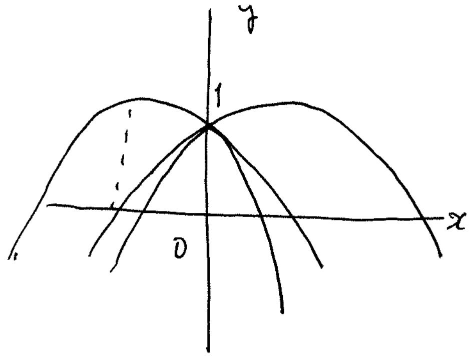


$b \geqq 0$ の必ず条件をみたす．

$b<0$ のとき $ax^2+bx+1 = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4a}$ より

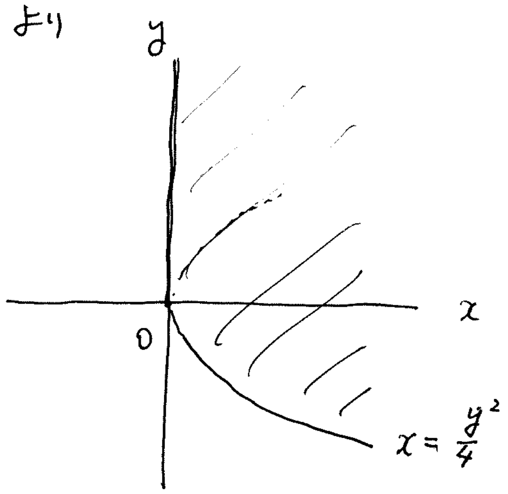
$1-\frac{b^2}{4a} > 0$ のとき条件をみたす

(イ) $a<0$ のとき　グラフの形をかくと



軸がいずれのときも条件をみたさない．

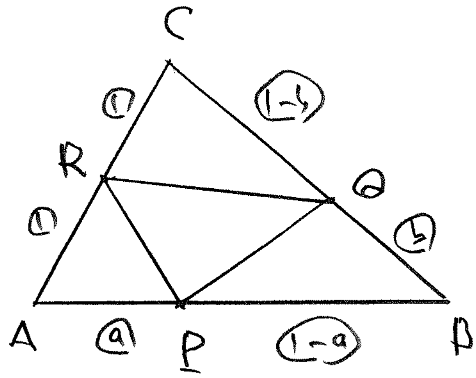
以上より



斜線部分で 境界は $x=\frac{y^2}{4}$ の部分は含まず，原点 y軸は含む．

２０２１年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

$\boxed{2}$



(1) $T = \triangle ABC - \triangle ARP - \triangle BPQ - \triangle CQR$

$$= S\left\{1 - \frac{a}{2} - (1-a)b - \frac{1}{2}(1-b)\right\}$$

$$\therefore \frac{T}{S} = ab - \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}$$

(2) (1) より

$$\frac{T}{S} = \left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{1}{2} - b\right) + \frac{1}{4}$$

ここで $0 < \frac{1}{2} - a < \frac{1}{2}$, $0 < \frac{1}{2} - b < \frac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{4} < \frac{T}{S} < \frac{1}{2}$$

(3) (2) より

$$2 < \frac{S}{T} < 4 \quad \therefore \frac{S}{T} \text{ の整数値は } 3$$

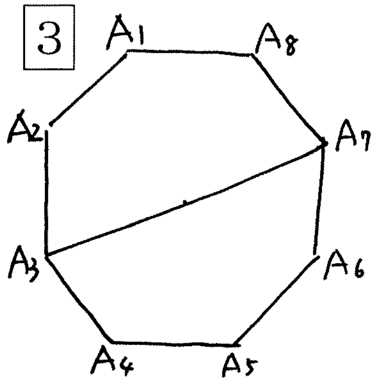
$$\therefore \frac{1}{pq} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore pq - 3(p+q) + 6 = 0 \iff (p-3)(q-3) = 3$$

p, q は 3 以上の整数だから

$$(p, q) = (4, 6), (6, 4)$$

3



(1) 中心をとおる軸の選び方は 4 とおり
それぞれについて
直角三角形が 6コずつ作れる
よって $4\times6=$ 24コ

(2) 1つの軸（対称軸）に対し、二等辺三角形は 6コずつ作れる
$4\times6=24$コ
このうち、直角二等辺三角形となるものは
$4\times2=8$コ
三角形は全体で ${}_8C_3=56$コ
よって $56-(24+24-8)=56-40=$ 16コ

(3) 1つの軸の一方のみに四角形をつくるものは
6コ
よって $4\times6=24$コ ——①
軸をまたぐもので、長方形でないものは
$4\times6=24$コ ——②
長方形となるものは
${}_4C_2=6$コ ——③

よって ①～③をたして
$24+24+6=$ 54コ

$\boxed{4}$

(1) lの方程式は $y=x+a^3-3a$ より lと $y=x^3-2x$ の交点のx座標は

$x^3-3x-a^3+3a=(x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$ の解

よってP, Qのx座標をα, βとすると解と係数の関係より $\alpha+\beta=-a$ であるので

PQの中点Sのx座標は $\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{a}{2}$

Sはl上の点よりSの座標は $\underline{\left(-\frac{a}{2},\ a^3-\frac{7}{2}a\right)}$

(2) (1)より $x^2+ax+a^2-3=0$ が aより小さい異なる2実数解をもつ必要があるので

判別式 $D=a^2-4(a^2-3)=-3a^2+12>0$, $\iff -2<a<2$

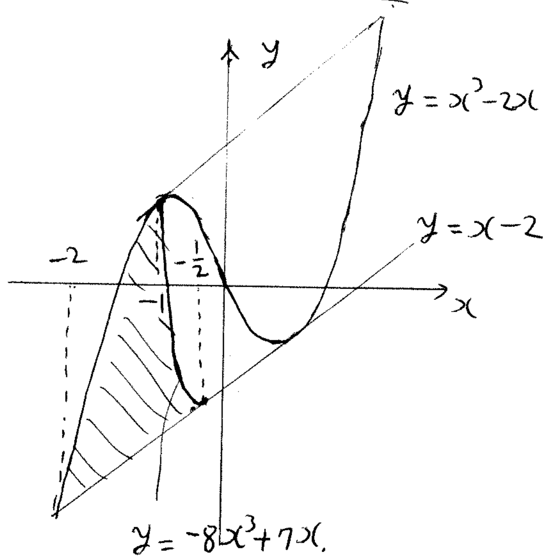
軸 $-\frac{a}{2}<a$, $\iff a>0$

$x=a$で $a^2+a\cdot a+a^2-3=3a^2-3>0$ $\iff a<-1,\ 1<a$

より $1<a<2$

$S\left(-\frac{a}{2},\ a^3-\frac{7}{2}a\right)$ より $x=-\frac{a}{2}$ とおくと Sの軌跡は $\underline{-1<x<-\frac{1}{2} で y=-8x^3+7x}$.

(3) 線分PSが動いてできる領域は右図のようになる



面積は

$$\int_{-2}^{-1}\left\{x^3-2x-(x-2)\right\}dx+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left\{-8x^3+7x-(x-2)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1}+\left[-2x^4+3x^2+2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{11}{4}+\frac{5}{8}=\frac{27}{8}$$

5

(1) 3点が同一直線上

$\Longleftrightarrow z^2 = kz$ （k：実数）

$\Longleftrightarrow z(z-k) = 0$

$\Longleftrightarrow z$ ：実数

(2) [1] $OA = OB$ のとき

$|z| = |z^2| \Longleftrightarrow |z| = 1$.

[2] $AB = AO$ のとき

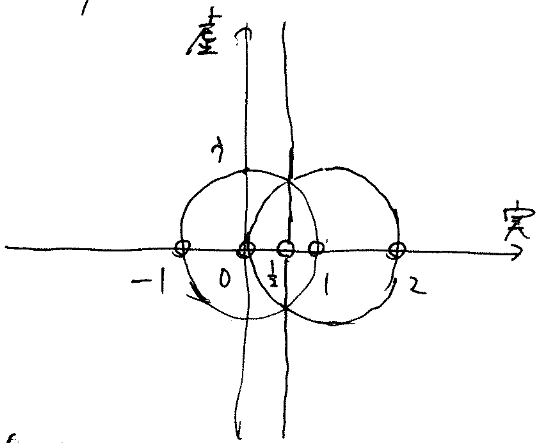
$|z^2 - z| = |z| \Longleftrightarrow |z-1| = 1$

[3] $BO = BA$ のとき

$|z^2| = |z^2 - z| \Longleftrightarrow |z| = |z-1|$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$

以上より



(3) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$A(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $B(r^2\cos 2\theta, r^2\sin 2\theta)$

よって $S = \triangle OAB$

$= \frac{1}{2}\left| r^2\cos 2\theta \cdot r\sin\theta - r^2\sin 2\theta \cdot r\cos\theta \right|$

$= \frac{r^3}{2}\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$

[1] $OA = OB$ のとき (2)より $r = 1$

$\therefore S = \frac{\sin\theta}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ （$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき）

[3] $BO = AB$ のとき

$z = \frac{1}{2} + ti \quad (0 < t \leq \frac{\sqrt{3}}{2})$

$z^2 = \frac{1}{4} - t^2 + ti$

$\therefore A\left(\frac{1}{2}, t\right)$, $B\left(\frac{1}{4} - t^2, t\right)$

$\therefore S = \frac{1}{2}\left| \frac{t}{4} - t^3 - \frac{t}{2} \right| = \frac{|t|}{8}|1 + 4t^2|$

$= \frac{1}{8}(4t^3 + t)$.

$f(t) = 4t^3 + t$ とおくと $f'(t) = 12t^2 + 1 > 0$

よって $f(t) \leq f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ になるのは [1] のときと共通のときであり そのとき $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

[2] $AB = AO$ のとき

$|r\cos\theta + ir\sin\theta - 1| = 1$

$\Longleftrightarrow r = 2\cos\theta$.

$\therefore S = \frac{(2\cos\theta)^3}{2}\sin\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta$

$= g(\theta)$ とおく.

$g'(\theta) = 4\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3)$

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

（(1)より z が実数のときは三角形を作らない）

以上より S の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ （$z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$）

6

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx = \left[-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x dx$

$n \geqq 0$のとき $\displaystyle = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^a \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x dx$ ——(☆)

これを用いて nに関する帰納法で示す（$n=0$から始める）

$n=0$のとき $\displaystyle 1+\int_0^a e^x dx = 1+e^a-1 = e^a$ より成立

$n=k$のとき成立すると仮定すると（☆）より

$$e^a = 1+a+\cdots+\frac{a^k}{k!}+\int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!}e^x dx$$

$$= 1+a+\cdots+\frac{a^k}{k!}+\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}+\int_0^a \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}dx$$

より $n=k+1$のときも成立。よって任意の正の整数 nに対して成立

(2) $0 \leqq x \leqq a$ のとき $\displaystyle\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x \geqq 0$ より（☆）から $\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x \geqq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

また、$0 \leqq x \leqq a$のとき $(a-x)^{n+1} \leqq a^{n+1}$より（☆）から

$$\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx \leqq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^x dx$$

$$= \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\left[e^x\right]_0^a\right) = \frac{a^{n+1}}{n+1}e^a$$

よって不等式は示された

(3) $a=1$とおくと (1)より $\displaystyle e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx > 0$

(2)より $\displaystyle \frac{1}{(n+1)!} \leqq \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx \leqq \frac{e}{(n+1)!}$

$n=5$のとき $\displaystyle \frac{1}{(5+1)!} = \frac{1}{720} > 10^{-3}$

$n=6$のとき $\displaystyle \frac{e}{(6+1)!} < \frac{3}{5040} < 10^{-3}$ より、不等式を満たす最小の正の整数は $n=6$