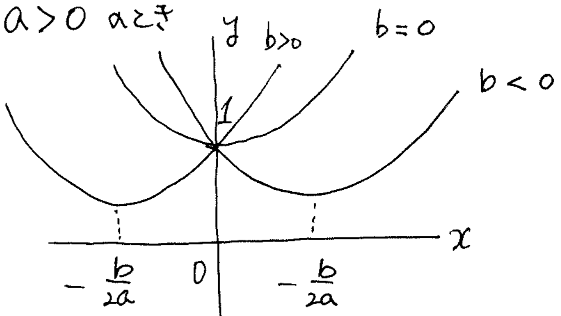
$\boxed{1}$

$y=ax^2+bx+1$

(i) $a=0,\ b=0$ のとき　$y=1$ となり　x軸と交わらない（条件をみたす）

(ii) $a=0,\ b\neq 0$ のとき　$y=bx+1$，条件をみたすのは $b>0$

(iii) $a\neq 0$ のとき (ア) $a>0$ のとき

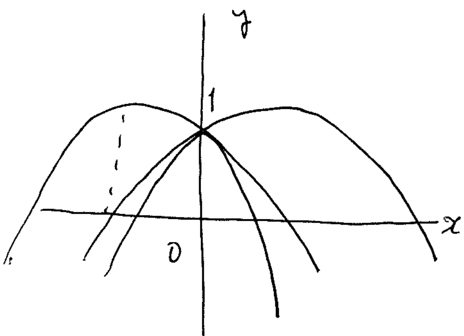


$b\geqq 0$ の必ず条件をみたす.

$b<0$ のとき　$ax^2+bx+1=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1-\frac{b^2}{4a}$　より

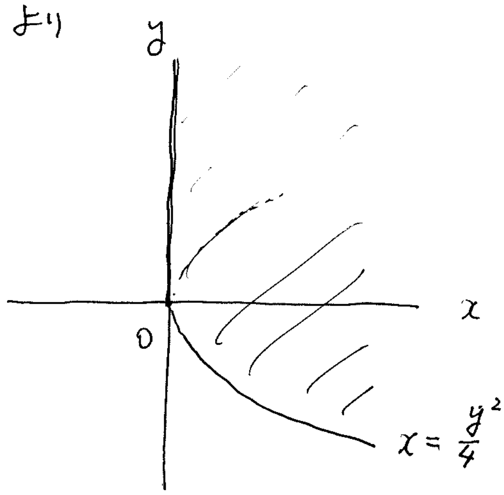
$1-\frac{b^2}{4a}>0$ のとき条件をみたす

(イ) $a<0$ のとき　グラフの形をかくて



軸がいずれのときも条件をみたさない.

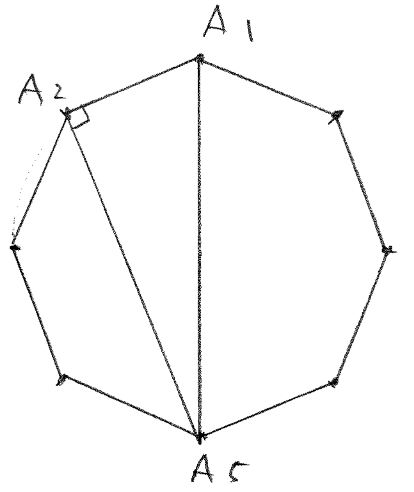
以上より

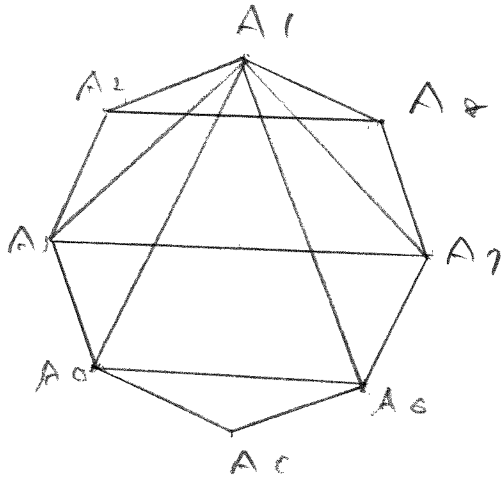


斜線部分で境界は $x=\frac{y^2}{4}$ の部分は含まず，原点 y軸は含む.

２０２１年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

$\boxed{2}$





(1) 直径のとり方が4通り、直径1つに対して頂点の選び方が6通り

$\therefore 4 \cdot 6 = 24$（通り）

(2) A_1を頂点とする2等辺3角形で、直角3角形でないものが2通り。よって2等辺3角形で直角3角形でないものが

$2 \times 8 = 16$（通り）

$\therefore {}_8C_3 - (24 + 16) = 16$（通り）

(3) (i) 直径を2つ含む … ${}_4C_2 = 6$ 通り

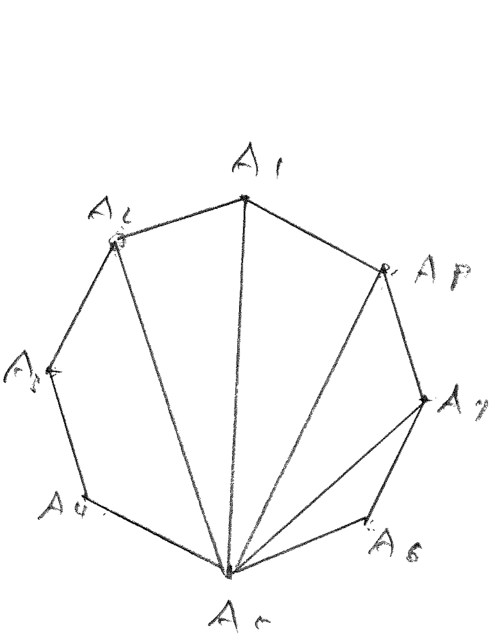
(ii) 直径を1つだけ含む

直径の同じ側に2つ

${}_3C_2 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ 通り

直径の反対側に1つずつ

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ 通り



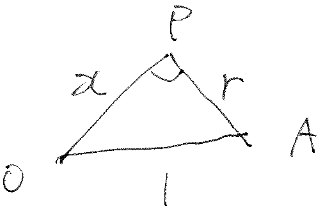
以上より

$6 + 24 + 24 = 54$（通り）

２０２１年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

$\boxed{3}$

(1)



余弦定理より

$1^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos\frac{\pi}{3}$

$\iff x^2 - rx + r^2 - 1 = 0$

$\iff x = \frac{1}{2}\left(r \pm \sqrt{4-3r^2}\right)$

ここで $r < \sqrt{4-3r^2}$ （∵ $r<1$）
なので 負の符号をとると
$x<0$ となるので 矛盾する．

よって $x = \frac{1}{2}\left(r + \sqrt{4-3r^2}\right)$．

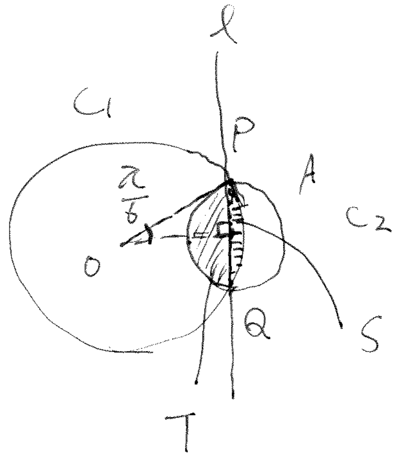
(2) $\angle PAO = \varphi$ とする．
余弦定理より

$x^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\theta$

$\iff \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\varphi$

$\iff \cos\varphi = 0 \iff \varphi = \frac{\pi}{2}$.

(3)



ℓ と C_1，ℓ と C_2 で囲まれる部分の面積を それぞれ S, T とする．

$S = 2\left(\pi x^2\cdot\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} - \frac{1}{2}x^2\cos\varphi\sin\varphi\right)$

$= 2\left(\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$= \frac{2}{9}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$T = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{6}\pi$

∴ 求める面積は

$S + T = \frac{7}{18}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{4}$

(1) $y=x^3+x^2$ 上の点 $(\alpha, \alpha^3+\alpha^2)$ における接線は

$$y-(\alpha^3+\alpha^2)=(3\alpha^2+2\alpha)(x-\alpha)$$

整理して

$$y=(3\alpha^2+2\alpha)x-2\alpha^3-\alpha^2 \quad \text{——①}$$

$y=x^2+4x+16$ 上の点 $(\beta, \beta^2+4\beta+16)$ における接線は

$$y-(\beta^2+4\beta+16)=(2\beta+4)(x-\beta)$$

整理して

$$y=(2\beta+4)x-\beta^2+16 \quad \text{——②}$$

①, ② より（一致するとして）

$$\begin{cases} 3\alpha^2+2\alpha=2\beta+4 \\ -2\alpha^3-\alpha^2=-\beta^2+16 \end{cases} \quad \text{——※}$$

2式から β を消去して

$$9\alpha^4+4\alpha^3-24\alpha^2-16\alpha-48=0$$

これは $\alpha=\pm 2$ を解にもつので

$$(\alpha+2)(\alpha-2)(9\alpha^2+4\alpha+12)=0$$

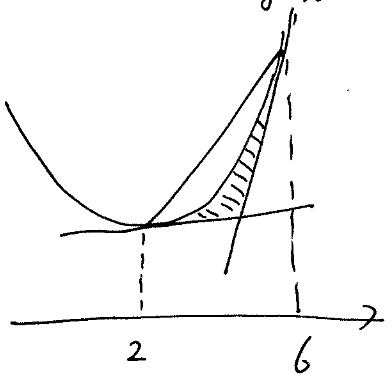
となる。

$\alpha=-2$ のとき ※ から $\beta=2$

$\alpha=2$ のとき $\beta=6$

2接線は $y=8x+12$, $y=16x-20$

(2)



$$S=\frac{1}{12}(6-2)^3=\frac{1}{12}\times 4^3=\frac{16}{3}$$

[2接線の交点は $(4, 44)$ であり

$$S=\int_2^4 \{x^2+4x+16-(8x+12)\}dx+\int_4^6 \{x^2+4x+16-(16x-20)\}dx$$

$$=\int_2^4 (x-2)^2 dx+\int_4^6 (x-6)^2 dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-2)^3\Big]_2^4+\frac{1}{3}\Big[(x-6)^3\Big]_4^6$$

$$=\frac{1}{3}\times 8+\frac{1}{3}\times 8=\frac{16}{3}$$]