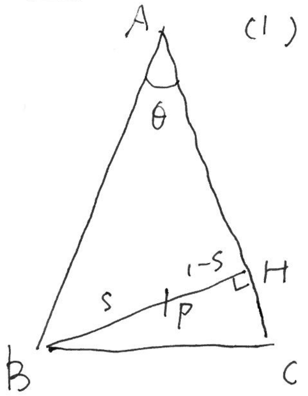
２０２０年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

1



(1) 余弦定理より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cos\theta,\quad \cos\theta = \frac{7}{8} \cdots(\text{答})$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8} \quad \cdots(\text{答})$$

（$\cos\theta > 0$ より θ は鋭角）

(2) $$\overrightarrow{AP} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AH} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\cos\theta\,\overrightarrow{AC} = (1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{7}{8}s\overrightarrow{AC}$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = \left|(1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{7}{8}s\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$= (1-s)^2|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{49}{64}s^2|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{7}{4}(1-s)s\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{15}{64}s^2 - \frac{15}{32}s + 1$$

$$|\overrightarrow{BP}|^2 = |BH\cdot s|^2 = \sin^2\theta\cdot s^2 = \frac{15}{64}s^2$$

$$|\overrightarrow{CP}|^2 = |\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}|^2 = \left|(1-s)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{7}{8}s-1\right)\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$= (1-s)^2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2(1-s)\left(\frac{7}{8}s-1\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \left(\frac{7}{8}s-1\right)^2|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$= \frac{15}{64}s^2 - \frac{15}{32}s + \frac{1}{4}$$

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = \frac{45}{64}s^2 - \frac{15}{16}s + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{45}{64}\left(s - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

$s = \frac{2}{3}$ のとき最小値 $\frac{15}{16}$ をとる …(答)

$\boxed{2}$

(1) 円Cの方程式は

$$(x-a)^2+(y-2)^2=a^2 \quad \text{①}$$

と変形できるのでCは中心$(a,2)$,

半径$|a|$の円である.

LとMの交点は連立方程式

$$\begin{cases} -4x+3y+a=0 \\ 3x+4y-7a=0 \end{cases}$$

を解いて$(x,y)=(a,a)$となる.

これがC上にあるのは①に代入して

$(a-2)^2=a^2$　$\therefore$　$\underline{a=1}$

が成り立つときである。

(2) CとLが2つの共有点を持つのは

(Lと$(a,2)$の距離)<(Cの半径)

$$\iff \frac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}<|a|$$

$$\iff \underbrace{5|a|-|-3a+6|}_{②}>0$$

のときである.

②$=0$となるaを求める.

$a(-3a+6)<0$のとき

$5a+|-3a+6|=0$

$\therefore$　$a=-3$.

$a(-3a+6)>0$のとき.

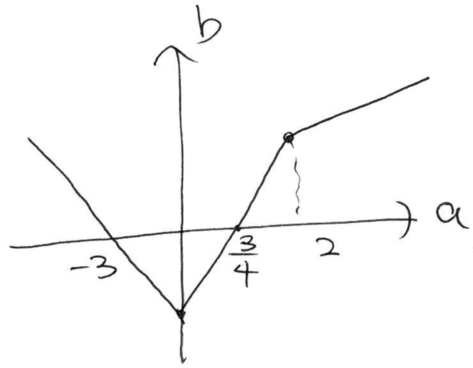
$5a-(-3a+6)=0$

$\therefore$　$a=\frac{3}{4}$

であるから

$b=5|a|-|-3a+6|$

のグラフは次のようになる



よって求める範囲は

$$\underline{a<-3,\ \frac{3}{4}<a}$$

(3) (2)と同様にMと$(a,2)$の距離を$|a|$と比較すると

$$\frac{|3a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<|a|$$

$$\iff 5|a|-|-4a+8|>0$$

のとき共有点は2つあり、この左辺が0のとき、すなわち

$a=-8,\ \frac{8}{9}$のとき共有点は1つである。

よって

(LとCの共有点の数)

+(MとCの共有点の数)$=3$

となるのは　$a=-8,\ \frac{8}{9}$　のときである。

これにL, MいずれもCと2点で交わり，それらの共有点に共通の点がある$a=1$の場合をあわせて

$$\underline{a=-8,\ \frac{8}{9},\ 1}$$

が求める値の全てとなる。

$\boxed{3}$

(1)　$n \geqq 3$ のとき　$n^2+8 < 3^n-2^n$ を示す

(I)　$n=3$ のとき

左辺 $=17$，右辺 $=27-8=19$ ゆえ成り立つ

(II)　$n=k\ (k \geqq 3)$ のとき

$$k^2+8 < 3^k-2^k \quad \text{——①}$$

が成り立つと仮定すると

$$3^{k+1}-2^{k+1}-(k+1)^2-8$$
$$=3\cdot3^k-2\cdot2^k-(k+1)^2-8$$
$$=3^k+2(3^k-2^k)-(k+1)^2-8$$
$$>3^k+2(k^2+8)-(k^2+2k+1)-8$$
$$=3^k+k^2-2k+7 = 3^k+(k-1)^2+6>0$$

よって　$(k+1)^2+8 < 3^{k+1}-2^{k+1}$ となり $n=k+1$ でも成り立つ

(I)，(II)より　$n \geqq 3$ のとき　$n^2+8 < 3^n-2^n$ が成り立つ

(2)　(1)より候補は $n=1, 2$ に限られる

$n=1$ のとき　左辺 $=2+1+8=11$，右辺 $=3$ より成り立つ．

$n=2$ のとき　左辺 $=4+4+8=16$，右辺 $=3^2=9$ より 〃 ．

$\therefore\ n=1, 2$

(3)　(2)より $n=1, 2$ のみしらべればよい

㋐ $n=1$ のとき

$2+1+8=3+a+b$

$a+b=8$ ゆえ

$(a, b, n)=(0, 8, 1)$

$(1, 7, 1)$

$\vdots$

$(8, 0, 1)$

$(2, 6, 1)$
$(3, 5, 1)$
$(4, 4, 1)$
$(5, 3, 1)$
$(6, 2, 1)$
$(7, 1, 1)$

㋑ $n=2$ のとき

$7=2a+b$ ゆえ

$(a, b, n)=(3, 1, 2)$

$(2, 3, 2)$

$(1, 5, 2)$

$(0, 7, 2)$

4

(1) 2回とも白玉が出て、かつ共に硬貨の表が出る確率だから

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{40}.$$

(2) 1回裏が出て、2回表が出る必要がある。その条件下で表のときの玉は白と赤が1つずつ出る確率は $2\cdot\frac{3\cdot 2}{5\cdot 4}$，よって求める確率は

$$ {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{3\cdot 2}{5\cdot 4}=\frac{9}{40}.$$

(3) $n-1$ 回目までで表が4回出て、n 回目に表が出る確率なので

$$P_n={}_{n-1}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!\cdot 2^n}.$$

(4) $\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{n}{2n-8}$．よって $P_{n+1}<P_n \iff \frac{n}{2n-8}<1$

$\iff n>8$

$\Rightarrow P_9>P_{10}>P_{11}>\cdots$.

同様に $P_{n+1}=P_n \iff n=8$

$\Rightarrow P_8=P_9$.

また $P_n<P_{n+1} \iff n<8$

$\Rightarrow \cdots<P_6<P_7<P_8$.

以上より P_n が最大となる n は 8, 9.

2020年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

$\boxed{5}$

(1) $z=\dfrac{-(t-i)}{t^2+1}=-\dfrac{t}{t^2+1}+\dfrac{1}{t^2+1}i$

$\therefore$ 実部 : $-\dfrac{t}{t^2+1}$, 虚部 : $\dfrac{1}{t^2+1}$

(2) (1)より

$$z-\frac{i}{2}=-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{2(t^2+1)}i$$

$$\therefore \left|z-\frac{i}{2}\right|=\sqrt{\frac{t^2}{(t^2+1)^2}+\frac{(1-t^2)^2}{4(t^2+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(t^2+1)^2}{4(t^2+1)^2}}=\frac{1}{2}$$

(3) $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと.

$$\frac{2t}{t^2+1}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1}=\sin\theta$$

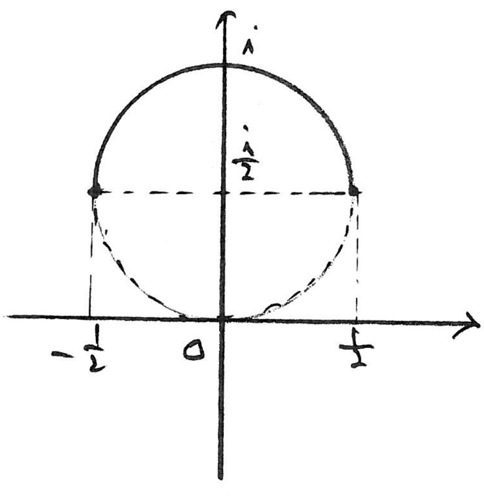
$$\frac{1-t^2}{t^2+1}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1}=\cos\theta$$

$$\therefore z-\frac{i}{2}=\frac{1}{2}(-\sin\theta+i\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\quad\left(0\leqq\theta+\frac{\pi}{2}\leqq\pi\right)$$

つまり 中心 $\dfrac{i}{2}$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円のうち 図の実線部.



２０２０年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

$\boxed{6}$ (1) $A(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$　　$x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\cos^n t\,dt=A(n,m)$$

$$A(m+2,n)+A(m,n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{m+2}x\sin^n x+\cos^m x\sin^{n+2}x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$$

$$=A(m,n)$$

(2) $A(m,1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos^m x(\cos x)'\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{m+1}$$

(3) $A(m,n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin x\cdot\sin^{n+1}x\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}x(\sin^{n+1}x)'\,dx$$

$$=\frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,n)$$

(4) (1)より $A(m,n)=A(n,m)$ であるので、n が奇数の場合を示せばよい

n が奇数のとき $A(m,n)$ が有理数であることを数学的帰納法により示す

$n=1$ のとき (2)より $A(m,n)=\frac{1}{m+1}$ は有理数

$n=2k-1$ (k は自然数) のとき $A(m,2k-1)$ が有理数であると仮定すると

$$\begin{cases} A(m,2k+1)=\dfrac{2k}{m+1}A(m+2,2k-1) & \text{((3)より)}\\ A(m,2k+1)+A(m+2,2k-1)=A(m,2k-1) & \text{((1)より)}\end{cases}$$

より $A(m,2k+1)=\dfrac{2k}{m+2k+1}A(m,2k-1)$

よって $A(m,2k+1)$ も有理数となる

よって示された