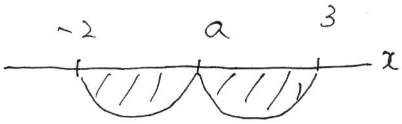
２０２０年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

$\boxed{1}$

(1)



$$S(a)=\int_{-2}^{a}-(x-a)(x+2)\,dx+\int_{a}^{3}-2(x-a)(x-3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(a-2)x^2+2ax\right]_{-2}^{a}+\left[-\frac{2}{3}x^3+(a+3)x^2-6ax\right]_{a}^{3}$$

$$=-\frac{1}{6}a^3+4a^2-7a+\frac{31}{3}\quad\cdots(答)$$

(2)　$S'(a)=-\frac{1}{2}a^2+8a-7$，$S'(a)=0$ のとき $a=8\pm5\sqrt{2}$

a	-2	$\cdots$	$8-5\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\frac{125}{3}$	↘		↗	$\frac{125}{6}$

増減表より　$S(a)$ は　$a=-2$ のとき最大，$a=8-5\sqrt{2}$ のとき最小となる。…(答)

2

(1) $n=3$ のとき

(左辺) $=25$

(右辺) $=27$

なので成り立つ。

$k \geqq 3$ とし、$n=k$ のとき成り立つと仮定する。$\dfrac{k+1}{k}=1+\dfrac{1}{k}<3$ に注意すると

$2^{k+1}+(k+1)^2+8$

$<3\cdot 2^k+3k^2+3\cdot 8$

$<3\cdot 3^k=3^{k+1}$

となるので $n=k+1$ のときにも成り立つ。

よって数学的帰納法により題意は示された。

(2) $n \geqq 3$ のときは(1)より成り立たない。

$n=1$ のとき
(左辺) $=11$
(右辺) $=3$

$n=2$ のとき
(左辺) $=16$
(右辺) $=9$

なので求める n は $n=1, 2$ である。

(3) $n \geqq 3$ のとき、(1)より

$2^n+n^2+8<3^n \leqq 3^n+an+b$

なので成り立たない。

$n=1$ のとき

$11=3+a+b$

なので、$b=8-a$.

$n=2$ のとき

$16=9+2a+b$

なので $b=7-2a$.

これより

$(n, a, b)=(1,0,8), (1,1,7), (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (1,5,3), (1,6,2), (1,7,1), (1,8,0), (2,0,7), (2,1,5), (2,2,3), (2,3,1)$

が求める組の全てである。

$\boxed{3}$

(1) $-4x+3y+a=0 \cdots ①$

$3x+4y-7a=0 \cdots ②$

①×3＋②×4，②×3－①×4 より

$25y-25a=0$，$25x-25a=0$

よって，L，M の交点は (a,a) である．C に代入して

$-4a+4=0 \quad \therefore a=\underline{1}$

(2) $C:(x-a)^2+(y-2)^2=a^2$ より

C の中心 $(a,2)$，半径 $|a|$

$\therefore \dfrac{|-3a+6|}{5}<|a| \rightleftarrows (-3a+6)^2<25a^2$

$\rightleftarrows 4a^2+9a-9>0 \quad \therefore \underline{a<-3,\ a>\dfrac{3}{4}}$

(3) L と M が互いに垂直で交点が (a,a) であることとあわせて，条件は

(i) (a,a) が C 上にある．

(ii) L，M の一方が C に接して，他方が C と異なる2点で交わる．

(i) は (1) より $a=1$

(ii) は C と M が異なる2つの共有点をもつのが

$\dfrac{|-4a+8|}{5}<|a| \rightleftarrows a<-8,\ a>\dfrac{8}{9}$

となることと，$\dfrac{3}{4}<\dfrac{8}{9}$ とから　$a=-8,\ \dfrac{8}{9}$

以上から

$a=\underline{1,\ -8,\ \dfrac{8}{9}}$

$\boxed{4}$

(1) $(x, y) = (2s - t,\ -s + 2t)$ より

$$x + y = (2s - t) + (-s + 2t) = s + t = \underline{6}$$

(2) $x = 0,\ y = 6$ なので

$$\begin{cases} 2s - t = 0 \\ -s + 2t = 6 \end{cases}$$

を解いて　$s = 2,\ t = 4$.

6回硬貨を投げるとき，表が2回，裏が4回出る確率なので

$${}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{2^6} = \underline{\frac{15}{64}}$$

(3) $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ とすると，条件は

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 3(2s - t) + (-s + 2t)$$
$$= 5s - t = 5s - (6 - s) = 6(s - 1)$$

$\vec{p} = (3s - 6,\ 12 - 3s)$ より

$$|\vec{p}|^2 = (3s - 6)^2 + (3s - 12)^2 = 18(s^2 - 6s + 10)$$

$$|\vec{q}|^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$\therefore \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}\right)^2 = \frac{6^2 (s - 1)^2}{18(s^2 - 6s + 10) \cdot 10}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{(s - 1)^2}{(s^2 - 6s + 10)} = \frac{1}{5} \frac{(s - 1)^2}{\{(s - 3)^2 + 1\}}$$

s	$(s-3)^2+1$	$(s-1)^2$	$\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vert\vec{p}\vert\vert\vec{q}\vert}\right)^2$
0	10	1	$\frac{1}{50}$
1	5	0	0
2	2	1	$\frac{1}{10}$
3	1	4	$\frac{4}{5}$
4	2	9	$\frac{9}{10}$
5	5	16	$\frac{16}{25}$
6	10	25	$\frac{1}{4}$

左表より，求める確率は $s = 3$ または $s = 4$ となる確率

$\therefore$

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5}{16} + \frac{15}{64} = \underline{\frac{35}{64}}$$