２０１９年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

$\boxed{1}$

放物線 $y=x^2+a$ と直線 $y=ax$ とが相異なる2点で交わるから

$x^2+a=ax$, $x^2-ax+a=0$ …① の判別式 $D=a^2-4a>0$ より

$a<0,\ 4<a$ …②

共有点P, Qの x 座標は ①をみたすから

$b^2-ab+a=0$, $c^2-ac+a=0$ …③

$c=b^2$ より ③ から $b(1-b)(a-b-b^2)=0$

$b<0$ より $a=b^2+b$ …④

これを③に代入し整理し $b^3-b^2-b=b(b^2-b-1)=0$

$b<0$ より $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

④に代入し $a=2-\sqrt{5}$ これは②をみたす

2019年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

$\boxed{2}$

$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$ —— ①

が意味を持つのは

$n < x < 2n$ —— ②

のときのみである。

以下、全体を通して $a<1$ と $a>1$ の場合に分けて考える。

$a>1$ の場合

① $\iff x-n > (2n-x)^{\frac{1}{2}}$

$\iff (x-n)^2 > 2n-x$

$\iff x^2+(1-2n)x+n^2-2n>0$

$\iff x < \frac{2n-1-\sqrt{4n+1}}{2},\ x > \frac{2n-1+\sqrt{4n+1}}{2}$ —— ③

となる。

(1) $n=6$ のとき③は $x<3, x>8$ となる。

$6<x<12$ とあわせて $x=9, 10, 11$ が求める整数の全てである。

(2) ②と③をみたす整数 x が存在するのは

$\frac{2n-1+\sqrt{4n+1}}{2} < 2n-1$

$\iff \sqrt{4n+1} < 2n-1$

$\iff 4n+1 < (2n-1)^2$

$\iff n(n-2)>0$

のときであるから、$n \geqq 3$ が求める必要十分条件である。

$a<1$ の場合

① $\iff \frac{2n-1-\sqrt{4n+1}}{2} < x < \frac{2n-1+\sqrt{4n+1}}{2}$ —— ④

である。

(1) $n=6$ のとき④は $3<x<8$,

②は $6<x<12$ なので、

どちらもみたす整数 x は $x=7$ のみである。

(2) ②と④をみたす整数 x があるのは

$n+1 < \frac{2n-1+\sqrt{4n+1}}{2}$

$\iff 3 < \sqrt{4n+1}$

$\iff 2 < n$

のときであるから、この場合も $n \geqq 3$ が求める必要十分条件である。

3

(1) $a_1=1,\ a_2=3$ より, $n=1,2$ で明らか

$n=k,\ k+1$ のとき, $a_k>0,\ a_{k+1}>0$ とすると

$$a_{k+2}=\frac{2a_{k+1}^2}{a_k}>0$$

となり, $n=k+2$ でも成立. よって数学的帰納法により, すべての自然数 n で a_n は正である.

(2) (1) より

$$a_{n+2}a_n=2a_{n+1}^2 \iff \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\therefore\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=2\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=2^2\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}$$

$$=\cdots=2^{n-2}\cdot\frac{a_2}{a_1}=3\cdot2^{n-2}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}$$

$$=(3\cdot2^{n-2})(3\cdot2^{n-3})\cdots3$$

$$=3^{n-1}\cdot2^{1+2+\cdots+(n-2)}$$

$$=3^{n-1}\cdot2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\quad(n\geqq1)$$

4

(1) $P_1(j)={}_nC_j\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2) 最初の金貨に1〜nと番号をつけて考える
K回後．n枚中 金貨がj枚だけ残るのは
{ K回とも表のコインがj枚
{ K回中少なくとも1回裏となるものがn-j枚
のときなので

$P_k(j)={}_nC_j\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^j\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^{n-j}$

$=\frac{n!}{j!(n-j)!}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^j\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^{n-j}$

(3) $n=3$のとき

㋐ 2回目で金1
3 〃 金0 のとき $P_2(1)\times\frac{1}{2}=\frac{27}{64}\times\frac{1}{2}=\frac{27}{128}$

㋑ 2回目で金2
3 〃 金0 のとき $P_2(2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{64}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{256}$

㋒ 2回目で金3
3 〃 金0 のとき $P_2(3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{64}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{512}$

よって $\frac{27}{128}+\frac{9}{256}+\frac{1}{512}=\frac{1+18+108}{512}=\frac{127}{512}$

(3)の別解

$P_3(0)-P_2(0)=\left(\frac{7}{8}\right)^3-\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$=\frac{7^3-6^3}{8^3}=\frac{127}{512}$