平成３０年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

$\boxed{1}$

（1）　CとDが交わるとき，そのx座標は　$(x-a)^2+b=-x^2$

$2x^2-2ax+a^2+b=0$　をみたす。

そのx座標をα, β $(\alpha<\beta)$とおくと，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=\frac{a^2+b}{2} \quad \cdots ①$$

がなりたつ。また，α, βは異なるから判別式Dについて

$D=(-2a)^2-4\cdot 2(a^2+b)=-4a^2-8b>0 \quad \cdots ②$

条件より　$\beta=\alpha+1$，これを①に代入し，αを消去し，整理すると

$$b=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2} \quad \cdots ③$$　これは②をみたす。

したがって，(a, b)の軌跡は放物線　$y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$

（2）　2交点は$(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$でこの2点を通る直線の式は

$$y=\frac{-\beta^2-(-\alpha^2)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)-\alpha^2=-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

①より　$=-ax+\frac{a^2+b}{2}$

この直線と放物線　$y=-x^2-\frac{1}{4}$　の交点のx座標は

$-x^2-\frac{1}{4}=-ax+\frac{a^2+b}{2}$，　$x^2-ax+\frac{a^2+b}{2}+\frac{1}{4}=0$　をみたす。

この方程式について　判別式$D=(-a)^2-4\left\{\left(\frac{a^2+b}{2}\right)+\frac{1}{4}\right\}$

③より　$=(-a)^2-4\left\{\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right\}$

$=0$

よって，題意は示された。

平成３０年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

$\boxed{2}$

(1)　P(1)は1回目にnが出る確率，P(n)は，はじめのn−1回がすべて1の確率

$$P(1)=\frac{1}{n},\quad P(n)=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot 1=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

(2)　P(2)は1回目にk $(1\leqq k\leqq n-1)$が出るとき，2回目がn−k以上となる確率だから

$$P(2)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{k+1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n-1}{2}(n+2)=\frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$$

(3)　P(n−1)は，n−2回までに

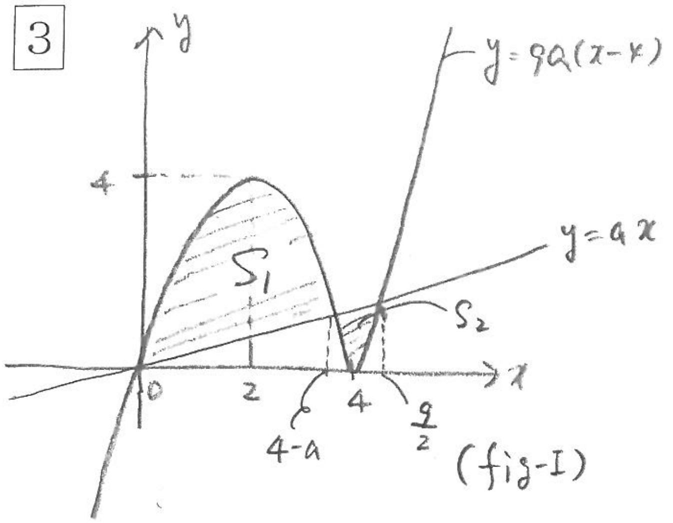
(i)　すべて1で，n−1回目は2以上

(ii)　1がn−3回で2が1回，n−1回目が1以上

$$\therefore P(n-1)=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}\cdot\frac{n-1}{n}+(n-2)\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}\cdot 1$$

$$=\frac{n^2-n-1}{n^{n-1}}$$

3



(fig-I)

(1) $-x^2+4x=ax$ より

$x(x+a-4)=0$

$x=0,\ 4-a$

$ax=9a(x-4)$ より

$x=9x-36$ ($a\neq0$ より)

$x=\frac{9}{2}$

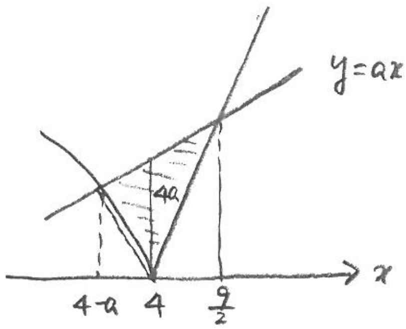
よって 交点は $(0,0),\ (4-a,\ 4a-a^2),\ \left(\frac{9}{2},\ \frac{9}{2}a\right)$

(2) fig-I のように S_1, S_2 とおくと，$S(a)=S_1+S_2$ であり

$S_1=\int_0^{4-a}(-x^2+4x-ax)\,dx=\frac{1}{6}(4-a)^3$ —①

$S_2=\frac{1}{2}\times4a\left(\frac{9}{2}-4+a\right)-\frac{1}{6}a^3$ (∵fig-II)

$=a(1+2a)-\frac{1}{6}a^3=a+2a^2-\frac{1}{6}a^3$ —②



①+②より

$S(a)=\frac{1}{6}(4-a)^3-\frac{1}{6}a^3+a+2a^2$

$=-\frac{1}{3}a^3+4a^2-7a+\frac{32}{3}$

(3) $S'(a)=-a^2+8a-7=-(a-1)(a-7)$

a	0	…	1	…	4
S'		−	0	+	
S		↘	min	↗	

$a=1$ のとき 最小値

$S(1)=-\frac{1}{3}+4-7+\frac{32}{3}=\frac{22}{3}$

$\boxed{4}$ (1) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DG}+(t-2)(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DG})-t\overrightarrow{DG}=\vec{0}$ より

$$2t\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+(t-2)\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{DG}=\frac{1}{2t}\left\{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+(t-2)\overrightarrow{DC}\right\}$$

(2) NはCDの中点より $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$ は一次独立なので

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DN} \iff \frac{1}{2t}=0$ であるが、これは不可

よって点Gと点Nは一致しない

(3) $\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{DN}$

$$=\frac{1}{2t}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC})$$

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DM}$

$$=\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})$$

$$=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC})$$

$$=-t\overrightarrow{NG}$$

したがって直線NGと直線MCは平行である