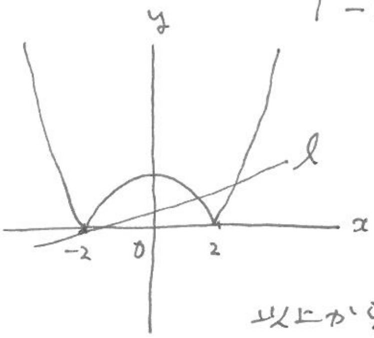
1

(1) l が点 $(-2, 0)$ を通るから　$0 = a\cdot(-2)+b$,　$b = 2a$

$$C:\ y = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & (x \leqq -2;\ 2 \leqq x) \\ -x^2+4 & (-2 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$



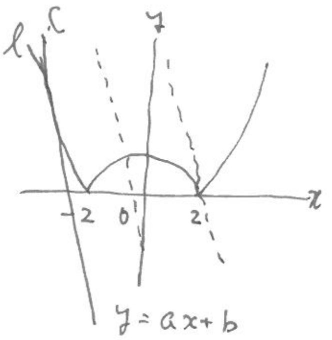
$y=-x^2+4$ の点 $(-2, 0)$ での接線の傾きは $y'=-2x$ より 4 であるから条件をみたす a は $0 < a < 4$.

以上から，$b = 2a$，$0 < a < 4$　…①

(2) C は y 軸について対称だから，l が点 $(2, 0)$ を通るとき，

$b=-2a$，$-4 < a < 0$　…②

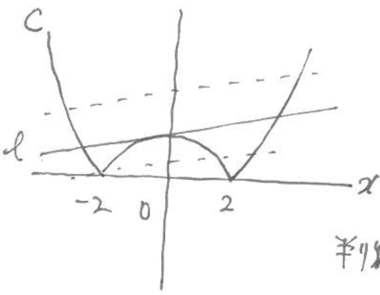
$a \leqq -4$ のとき，



C と l が接する場合を考えて，それを平行移動して考えると点 $(2, 0)$ での接線の傾きは -4 より共有点は 2 コ以下

$a \geqq 4$ のとき　y 軸について対称より　$a \leqq -4$ と同様に共有点は 2 コ以下

$-4 < a < 4$　　l が C に接する場合を考えて，それで平行移動して考える



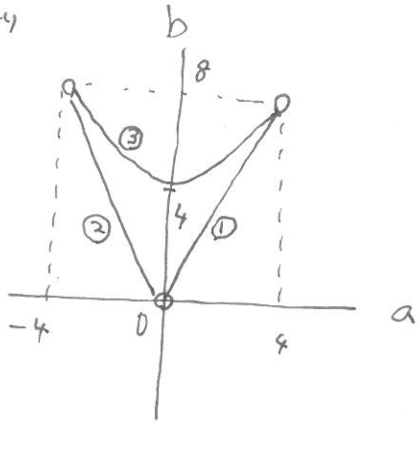
l と C が接するときに共有点が 3 コある.

$ax+b = -x^2+4$

$x^2+ax+b-4=0$

判別式 $D = a^2-4(b-4) = 0$，$b = \dfrac{a^2}{4}+4$ …③

①，②，③より



$\boxed{2}$ (1) 得点が3点になるのは，カードの組が

$$(0,1,2),\ (1,3,5),\ (2,3,4)$$

のいずれかのときで

$$\therefore \left(\frac{3}{{}_6C_3}\right)^2-\left(\frac{2}{{}_6C_3}\right)^2=\frac{1}{80}$$

(2) カードの取り方は ${}_6C_3=20$ 通りで，得点は

(i) 0を含まないとき，${}_5C_3=10$ 通りあり

2点…$(1,2,3)$，3点…$(1,3,5)$，$(2,3,4)$

4点…$(3,4,5)$

$\frac{7}{3}$点…$(1,2,4)$，$\frac{8}{3}$点…$(1,2,5)$，$(1,3,4)$

$\frac{10}{3}$点…$(1,4,5)$，$(2,3,5)$，$\frac{11}{3}$点…$(2,4,5)$

(ii) 0を含むとき，0以外の組は

3点…$(1,2)$，4点…$(1,3)$，5点…$(1,4)$，$(2,3)$

6点…$(1,5)$，$(2,4)$，7点…$(2,5)$，$(3,4)$

8点…$(3,5)$，9点…$(4,5)$

以上から，AとBが同じ得点となる確率は

$$\frac{1}{20^2}\left(1^2+3^2+2^2+1^2+2^2+2^2+1^2+2^2+2^2+2^2+1^2+1^2\right)$$

$$=\frac{38}{20^2}=\frac{19}{200}$$

Aが整数でない得点でBより大きい確率が

$$\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20}+\frac{2}{20}\cdot\frac{2}{20}+\frac{2}{20}\cdot\frac{7}{20}+\frac{1}{20}\cdot\frac{9}{20}=\frac{28}{400}$$

以上から

$$\frac{\frac{28}{400}}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{19}{200}\right)}=\frac{28}{181}$$

3

(1) $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ だから，$a\neq0$，b，c が整数のとき，これが有理数になることの必要十分条件は b^2-4ac がある有理数の平方で表わされることである。

a,b,c を1以上7以下の互いに異なる整数とし，$D=b^2-4ac$ とおく。

$b=1,2$ のとき，D がある有理数の平方となる a,c の組はない。

$b=3$ のとき，D がある有理数の平方となるのは

$(a,c)=(1,2),(2,1)$，

$b=4$ のときは

$(a,c)=(1,3),(3,1)$，

$b=5$ のときは

$(a,c)=(1,4),(1,6),(2,3),(3,2),(4,1),(6,1)$，

$b=6$ のときは

$(a,c)=(1,5),(2,4),(4,2),(5,1)$，

$b=7$ のときは

$(a,c)=(1,6),(2,3),(2,5),(2,6),(3,2),(3,4),$
$(4,3),(5,2),(6,1)\quad(6,2)$

の計24通りである。

よって求める組 (a,b,c) の総数は24である。

(2) $ax^2+bx+c=0$ は，(1)で得られたそれぞれの組について

$(a,b,c)=(1,3,2),(1,5,4),(1,6,5),(1,7,6),$
$(2,3,1),(2,5,3),(2,6,4),(2,7,5),$
$(3,5,2),(3,7,4),(4,5,1),(4,6,2),$
$(4,7,3),(5,6,1),(5,7,2),(6,7,1)$

のときは $x=-1$ を解にもち，

$(a,b,c)=(1,5,6),(2,7,6),(3,7,2)$

のとき　$x=-2$ を解にもち，

$(a,b,c)=(1,4,3),(3,4,1)$　のとき $x=0$ を解にもち，

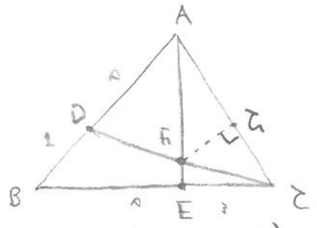
$(a,b,c)=(2,7,3)$　のとき $x=-3$ を解にもつ。

$(a,b,c)=(6,5,1),(6,7,1)$ のときの解はそれぞれ

$\dfrac{-5\pm1}{12}$，$\dfrac{-7\pm1}{12}$ で，これらは整数解をもたない。

よって求める組 (a,b,c) の総数は22である。

$\boxed{4}$



$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ とする.

(1)

$\overrightarrow{AF} = \gamma\overrightarrow{AE}$ と表すと $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{s+3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{s}{s+3}\overrightarrow{AC}$ なので

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3\gamma}{s+3}\overrightarrow{AB} + \frac{s\gamma}{s+3}\overrightarrow{AC} \quad \text{―①}$$

$\overrightarrow{AF} = \delta\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$ と表すと, $\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{s+1}\overrightarrow{CA} + \dfrac{s}{s+1}\overrightarrow{CB}$ なので

$$\overrightarrow{AF} = \delta\left(\frac{1}{s+1}\overrightarrow{CA} + \frac{s}{s+1}\overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{s\delta}{s+1}\overrightarrow{AB} + (1-\delta)\overrightarrow{AC} \quad \text{―②}$$

①,②より 連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{3\gamma}{s+3} = \dfrac{s\delta}{s+1} \\ \dfrac{s\gamma}{s+3} = 1-\delta \end{cases}$$

を得る. これをといて

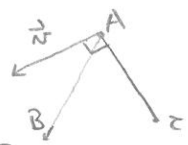
$$\gamma = \frac{s(s+3)}{s^2+3s+3}$$

となる. ①に代入して,

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{3s}{s^2+3s+3} \\ \beta = \dfrac{s^2}{s^2+3s+3} \end{cases}$$ //

(2) ベクトル $\vec{v}$ を A を始点として, $\overrightarrow{AC}$ に直交する単位ベクトルのうち $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\vec{v}$ と表したとき

$a, b > 0$ となるものとする. このとき



$$\overrightarrow{AF} = (\alpha a + \beta)\overrightarrow{AC} + b\alpha\vec{v}$$

と表示され FG の長さは $b\alpha$ となる. よって FG の長さが最大となるのは

$\alpha = \dfrac{3s}{s^2+3s+3}$ が最大となるときである. $s > 0$ で $\alpha = \dfrac{1}{s+\frac{3}{s}+3}$ となるので,

これは $s + \dfrac{3}{s}$ が最小となるときである. 相加相乗平均より

$$s + \frac{3}{s} \geqq 2\sqrt{s \cdot \frac{3}{s}} = 2\sqrt{3}$$

で等号成立は $s = \dfrac{3}{s}$ のときである. $s > 0$ より $s = \sqrt{3}$ となる //

$\boxed{5}$　$z\bar{z} + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$ ――(*)

(1)　(*)の両辺の共役複素数をとって

$z\bar{z} + \bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta} z + \bar{\gamma} = 0$ ――(**)

(*)から(**)を辺々ひいて

$\alpha z - \bar{\alpha}\bar{z} + \beta\bar{z} - \bar{\beta} z + \gamma - \bar{\gamma} = 0$

$\therefore\ (\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$ となる

(2)　$|\alpha| = |\beta| \neq 0$ かつ $\gamma < 0$ とする

(1)より $(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} = 0$ $(\because \gamma = \bar{\gamma})$

よって $(\alpha - \bar{\beta})z$ は実数である

ここで $\alpha - \bar{\beta} = 0$ とすると $\alpha = \bar{\beta}$ となり (*)に代入すると

$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \gamma = 0$ となり $|z + \bar{\alpha}|^2 = |\alpha|^2 - \gamma$ より

z は中心 $-\bar{\alpha}$，半径 $\sqrt{|\alpha|^2 - \gamma}$ (>0) の円上の点となり不適

よって $\alpha - \bar{\beta} \neq 0$ ゆえ t を実数として $z = (\bar{\alpha} - \beta)t$ とかける

このとき $\bar{z} = (\alpha - \bar{\beta})t$ ゆえ (*)に代入すると

$|\alpha - \bar{\beta}|^2 t^2 + \alpha(\bar{\alpha} - \beta)t + \beta(\alpha - \bar{\beta})t + \gamma = 0$

$|\alpha - \bar{\beta}|^2 t^2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)t + \gamma = 0$ ―― ⊛

これが異なる２つの実数解をもてばよい．判別式 D は

$D = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 - 4|\alpha - \bar{\beta}|^2\gamma = -4|\alpha - \bar{\beta}|^2\gamma$

であり

$\alpha - \bar{\beta} \neq 0$，$\gamma < 0$ ゆえ

$D > 0$ となるので条件をみたす．

よって求める条件は $\bar{\alpha} \neq \beta$．

$\boxed{6}$ (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}\left[e^{ax}\cos bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\,dx$

$= \frac{1}{a}\left(e^{\frac{\pi a}{2}}\cos\frac{\pi b}{2} - 1\right) + \frac{b}{a^2}\left[e^{ax}\sin bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx$

$= \frac{1}{a}\left(e^{\frac{\pi a}{2}}\cos\frac{\pi b}{2} - 1\right) + \frac{b}{a^2}\left(e^{\frac{\pi a}{2}}\sin\frac{\pi b}{2} - 0\right) - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx$

より，

$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I(a,b) = \frac{1}{a^2}\left\{e^{\frac{\pi a}{2}}\left(a\cos\frac{\pi b}{2} + b\sin\frac{\pi b}{2}\right) - a\right\}$

$I(a,b) = \frac{1}{a^2+b^2}\left\{e^{\frac{\pi a}{2}}\left(a\cos\frac{\pi b}{2} + b\sin\frac{\pi b}{2}\right) - a\right\}$ //

(2) $\sin bx\sin cx = \frac{1}{2}\left\{\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\right\}$ より，

$J(a,b,c) = \frac{1}{2}I(a,b-c) - \frac{1}{2}I(a,b+c)$ //

(3) $\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx$

$= \frac{1}{2}(\cos tx - \cos 3tx)\cdot\frac{1}{2}(\cos tx + \cos 7tx)$

$= \frac{1}{4}(\cos^2 tx - \cos tx\cos 3tx + \cos tx\cos 7tx - \cos 3tx\cos 7tx)$

$= \frac{1}{8}(1 + \cos 2tx - \cos 2tx - \cos 4tx + \cos 6tx + \cos 8tx - \cos 4tx - \cos 10tx)$

$= \frac{1}{8}(1 - 2\cos 4tx + \cos 6tx + \cos 8tx - \cos 10tx)$ より，

$8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx = I(1,0) - 2I(1,4t) + I(1,6t) + I(1,8t) - I(1,10t)$

ここで

$I(1,0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$

$I(1,t) = \frac{1}{1+t^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi t}{2} + t\sin\frac{\pi t}{2}\right) - 1\right\}$

$= \frac{1}{1+t^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\alpha\right) - 1\right\}$ （α は $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，$\cos\alpha = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ を満たす）

より，$-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2} \leqq I(1,t) \leqq \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}$．この不等式の両側ともに

$t\to\infty$ で 0 に収束するので，はさみうちの原理により $\lim_{t\to\infty} I(1,t) = 0$

したがって $\lim_{t\to\infty} I(1,4t) = \lim_{t\to\infty} I(1,6t) = \lim_{t\to\infty} I(1,8t) = \lim_{t\to\infty} I(1,10t) = 0$ より

$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx = I(1,0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$ //