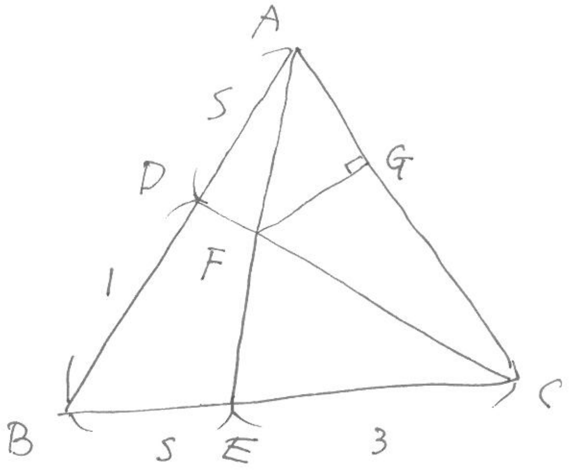
$\boxed{1}$



(1) メネラウスの定理

$$\frac{BD}{DA}\cdot\frac{AF}{FE}\cdot\frac{EC}{CA}=1 \text{ より}$$

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{AF}{FE}\cdot\frac{3}{s+3}=1$$

$$\frac{AF}{FE}=\frac{s^2+3s}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{s^2+3s}{s^2+3s+3}\overrightarrow{AE}=\frac{s^2+3s}{s^2+3s+3}\cdot\left(\frac{3\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}}{s+3}\right)$$

$$=\frac{3s}{s^2+3s+3}\overrightarrow{AB}+\frac{s^2}{s^2+3s+3}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \alpha=\frac{3s}{s^2+3s+3},\ \beta=\frac{s^2}{s^2+3s+3}$$

(2) 底辺をACとしたとき FGの長さが最大になるのは △AFCの面積が最大になるときである。以下 △ABCの面積を表すのに単に △ABCとかく。

$$\triangle AFC=\triangle AEC\cdot\frac{AF}{AE}=\frac{AF}{AE}\cdot\frac{CE}{BC}\cdot\triangle ABC=\frac{s^2+3s}{s^2+3s+3}\cdot\frac{3}{s+3}\triangle ABC$$

$$=\frac{3s}{s^2+3s+3}\triangle ABC$$

$s>0$ ∴ 相加平均と相乗平均の関係 より

$$\frac{3s}{s^2+3s+3}=\frac{3}{s+3+\frac{3}{s}}\leqq\frac{3}{3+2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}}=\frac{3}{3+2\sqrt{3}}$$

等号は $s=\frac{3}{s}$ 、$s>0$ より $s=\sqrt{3}$ のとき最大値をとる。

$\boxed{2}$　$f(x)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$

(1) (i) $-\frac{p}{2}\leqq -1 \iff p\geqq 2$ のとき

$f(-1)=q-p+1\geqq 0$

(ii) $-1\leqq -\frac{p}{2}\leqq 2 \iff -4\leqq p\leqq 2$

のとき

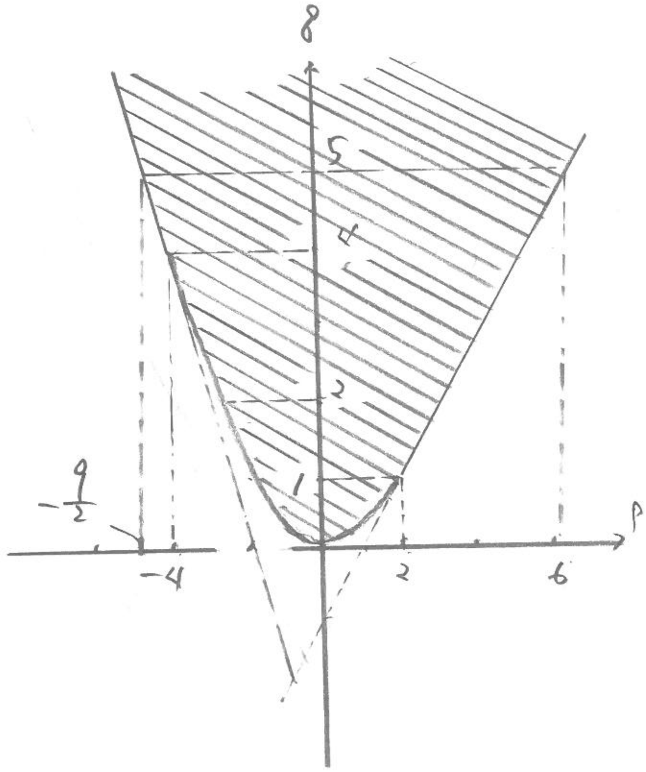
$f\left(-\frac{p}{2}\right)=q-\frac{p^2}{4}\geqq 0$

(iii) $p\leqq -4$ のとき

$f(2)=q+2p+4\geqq 0$

よって，Dは右図の斜線部

(境界含む)



(2) (1)の図と $q=5$ と

$q=p-1$，$q=-2p-4$

の交点がそれぞれ $(6,5)$，$\left(-\frac{9}{2},5\right)$ だから

面積Sは

$$S=\left(6+\frac{9}{2}\right)\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(4+5)-\int_{-4}^{2}\frac{p^2}{4}dp-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(1+5)$$

$$=\frac{105}{2}-\frac{9}{4}-\left[\frac{p^3}{12}\right]_{-4}^{2}-12$$

$$=\frac{129}{4}$$

$\boxed{3}$

(1) $2a+1 = a+(a+1)$

$= a+3b+3$ （$\because a=3b+2$ より）

$= a+3(b+1)$

よって $s=1$, $t=b+1$ となる

$a+3(b+1)=as+3t$ より

$3(b+1-t)=a(s-1)$

a は 3 の倍数ではないので

$s=1$, $\therefore b+1-t=0$

(2) ㋐ $n=2a-2+3k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ のとき

(i) $a=3b+2$ のとき $(c=2)$

$n=a+(a-2+3k)$

$= a+3(b+k)$ とかけるので

$s=1$, $t=b+k$ と

(ii) $a=3b+1$ のとき $(c=1)$

$n=2(a-1)+3k$

$= 6b+3k$

$= 3(2b+k)$ ゆえ

$s=0$, $t=2b+k$ とする

㋑ $n=2a-1+3k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ のとき

$a=3b+2$ のとき $(c=2)$

$n=6b+3+3k$

$=3(2b+k+1)$ より

$s=0$, $t=2b+k+1$ とする

$a=3b+1$ のとき $(c=1)$

$n=a+(a-1+3k)$

$= a+3(b+k)$ より

$s=1$, $t=b+k$ とする。

㋒ $n=2a+3k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ のとき

$s=2$, $t=k$ とすればよい

よって $n \geqq 2a-2$ をみたすすべての n について

条件をみたす s, t が存在することがわかった。

$\boxed{4}$ (1) 0を含み得点が3点となる組合せは $\{0,1,2\}$

0を含まず得点が3点となる組合せは $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$

A, B とも 3点となる組合せは $(1+2)^2$ 通り、うち A,B とも 0を取り出さないのは 2^2 通り

よって求める確率は $\dfrac{3^2-2^2}{{}_6C_3^{\,2}} = \dfrac{5}{400} = \dfrac{1}{80}$ //

(2) ${}_6C_3$ 通りのカードの組合せを点数の順に整理すると、

2点 … $\{1,2,3\}$

$\frac{7}{3}$点 … $\{1,2,4\}$

$\frac{8}{3}$点 … $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$

3点 … $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{0,1,2\}$

$\frac{10}{3}$点 … $\{1,4,5\}$, $\{2,3,5\}$

$\frac{11}{3}$点 … $\{2,4,5\}$

4点以上はすべて整数点となる

Aが $\frac{7}{3}$点 のとき、Bは2点以下 の 1通り、

〃 $\frac{8}{3}$ 〃 〃 $\frac{7}{3}$ 〃 2 〃 (Aは2通り)

〃 $\frac{10}{3}$ 〃 〃 3 〃 7 〃 (Aは2通り)

〃 $\frac{11}{3}$ 〃 〃 $\frac{10}{3}$ 〃 9 〃

よって求める確率は $\dfrac{1+2\times2+7\times2+9}{{}_6C_3^{\,2}} = \dfrac{28}{400} = \dfrac{7}{100}$ //