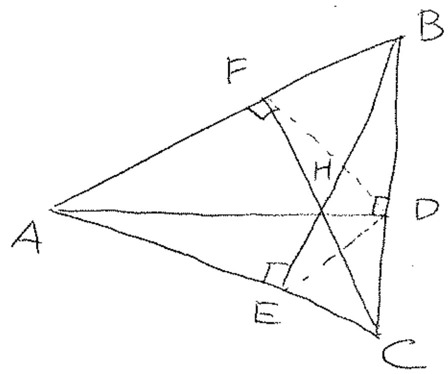
$\boxed{1}$

(1)　$\angle BFC = 90^\circ$ であるから B, F, C を通る円は線分 BC を直径とする円である。同様に $\angle BEC = 90^\circ$ であることから、この円は E も通ることがわかる。

よって四角形 BCEF は円に内接する。



$\angle AFH = \angle AFC = 90^\circ$

$\angle AEH = \angle AEB = 90^\circ$

より

$\angle AFH + \angle AEH = 180^\circ$

となる。これは AFHE が円に内接することを意味する。

(2)　AFHE に対する議論と同様に四角形 BDHF は円に内接する。ゆえに円周角の定理により

$\angle BDF = \angle BHF$

が成り立つ。同様に $\angle CDE = \angle CHE$ だが、$\angle CHE = \angle BHF$ なので

$$\begin{aligned}\angle ADE &= \angle ADC - \angle CDE \\ &= 90^\circ - \angle BDF \\ &= \angle ADF\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{2}$

(1) $n \geqq 6$ のとき，$2^n > n^2+7$ が成立することを帰納法により示す．

(i) $n=6$ のとき，

$$2^6 = 64,\quad 6^2+7 = 36+7 = 43$$

となり，主張は正しい．

(ii) n のとき，主張が正しいと仮定すると．

$$2^n > n^2+7$$

が成立する．両辺に2をかけて．

$$2^{n+1} > 2(n^2+7) \quad \cdots \text{①}$$

が成り立つ．

$$2(n^2+7) - \{(n+1)^2+7\} = (n-1)^2+5 > 0,\quad n \geqq 6.$$

これより $2(n^2+7) > (n+1)^2+7$ がいえ．①とあわせて．

$$2^{n+1} > (n+1)^2+7$$

が成立する．

以上，(i),(ii) より $n \geqq 6$ なる自然数 n に対して，

$$2^n > n^2+7$$

が成立する．(証明終)．

(2) p, q が共に3以上の素数であるとき，素数は奇数であることから，p^q，q^p は共に奇数である．一方，q^p+7 は偶数となるから．$p^q = q^p+7$ となる素数の組 (p, q) は存在しない．したがって $p=2$ または $q=2$ である．

(i) $q=2$ のとき．

$$p^2 = 2^p+7 \quad \cdots \text{①}$$

となるが，$p \geqq 6$ のとき，(1) より $p^2-7 < p^2+7 < 2^p$ となり，①をみたす $p \geqq 6$ は存在しない．

$$2^2 < 2^2+7,\ 3^2 < 2^3+7,\ 4^2 < 2^4+7,\ 5^2 < 2^5+7$$

であるから $p=1,\cdots,5$ のどれも，①をみたさない．したがって，$q=2$ のとき，$p^q = q^p+7$ なる (p, q) の組は存在しない．

(ii) $p=2$ のとき．

(1)より $q \geqq 6$ に対して．$2^q > q^2+7$ となるから，$q \leqq 5$ のみを考えれば十分である．

$q=1$ のとき．$2^1 < 1^2+7$，$q=3$ のとき，$2^3 < 3^2+7$

$q=2$ のとき，$2^2 < 2^2+7$，$q=4$ のとき，$2^4 < 4^2+7$．

$q=5$ のとき．$2^5 = 5^2+7$ となる．よって，$(p, q) = (2, 5)$ は，$p^q = q^p+7$ をみたす．

以上から．$p^q = q^p+7$ をみたす素数の組 (p, q) は $(p, q) = (2, 5)$ のみである．

$\boxed{3}$ (1) $\dfrac{3!}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ 　(目の出方は 6^3 とおり、$\{a,b,c\}=\{3,4,5\}$ の順列は $3!$ とおり)

(2) まず

$a\leqq b\leqq c$ としておくと、三角形になる条件は

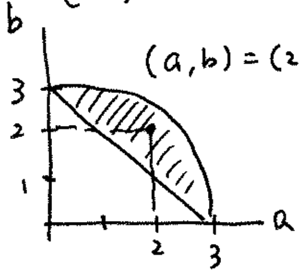
$$a+b>c \text{ ——①}$$

それがさらに鈍角になる条件は

$$c^2>a^2+b^2 \text{ ——②}$$

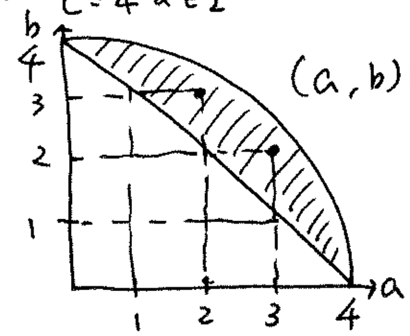
⓪ $c=1,2$ のときはない

㋐ $c=3$ のとき



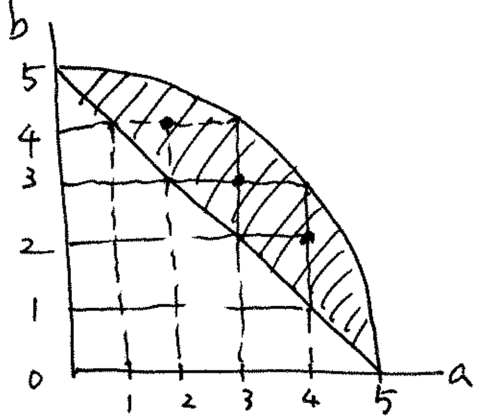
$(a,b)=(2,2)$

㋑ $c=4$ のとき



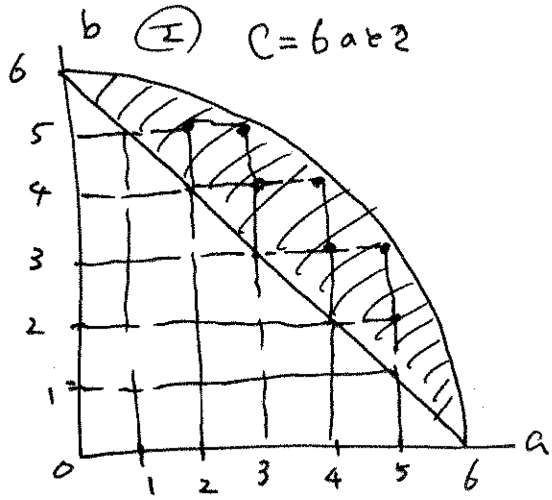
$(a,b)=(2,3)$

㋒ $c=5$ のとき



$(a,b)=(2,4),(3,3)$

㋓ $c=6$ のとき



$(a,b)=(2,5),(3,4),(3,5),(4,4)$

a,b,c の大小を解消して
すべて数えあげると、

㋐ 3とおり ㋑ $3!=6$ とおり ㋒ $3!+3=9$ とおり ㋓ $3\times3!+3=21$ とおり

よって $\dfrac{3+6+9+21}{6^3}=\dfrac{39}{6^3}=\dfrac{13}{72}$

$\boxed{4}$

(1) $(x\pm i)^7=\sum_{k=0}^{7}{}_7C_k x^{7-k}(\pm i)^k$

$=x^7\pm 7ix^6-21x^5\mp 35ix^4+35x^3\pm 21ix^2-7x\mp i$ （複号同順）

より $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$

$=7x^6-35x^4+21x^2-1$

したがって $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)=(0, 7, 0, -35, 0, 21, 0, -1)$

(2) $P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\right)^7}{2i}$

$=\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7}{2i\sin^7\theta}$

$=\dfrac{(\cos7\theta+i\sin7\theta)-(\cos7\theta-i\sin7\theta)}{2i\sin^7\theta}$

$=\dfrac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}$

(3) (1)より $Q(x^2)=P(x)$ を満たすので

$Q(x_k)=Q\left(\dfrac{\cos^2k\theta}{\sin^2k\theta}\right)=P\left(\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right)$

$=\dfrac{\sin7k\theta}{\sin^7k\theta}$ （(2)より）

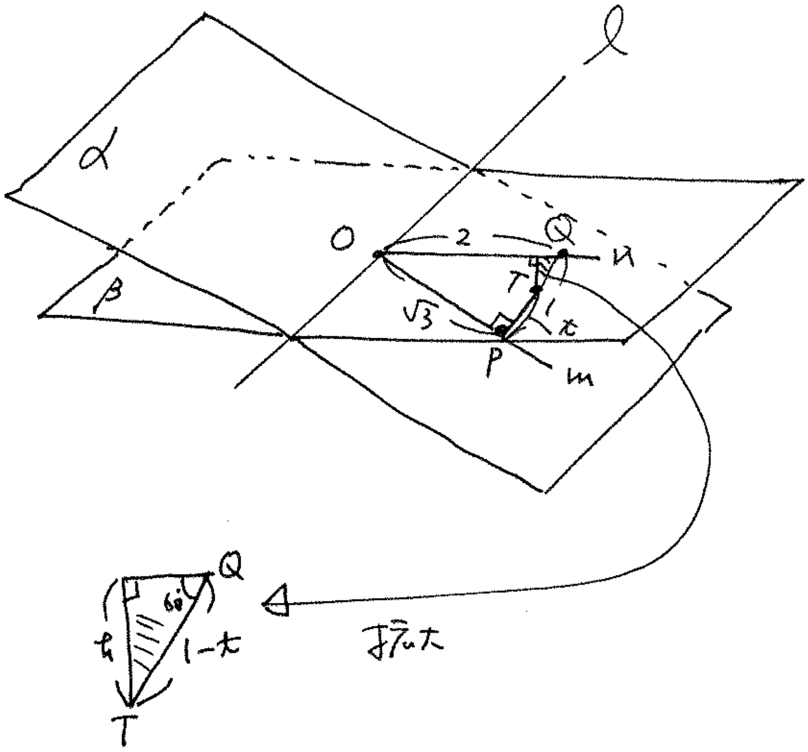
$=\dfrac{\sin k\pi}{\sin^7\frac{k\pi}{7}}=0$

$x_k=\dfrac{1}{\tan^2\frac{k\pi}{7}}$ で $0<\frac{\pi}{7}<\frac{2\pi}{7}<\frac{3\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$ より x_1, x_2, x_3は相異なるので、

$x=x_1, x_2, x_3$ は3次方程式 $Q(x)=0$ の解であり、解と係数の関係より

$x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_3}{a_1}=5$

$\boxed{5}$



(1) Tとαの距離がtなので、切り口の円の半径r_αは

$$r_\alpha=\sqrt{2-t^2}$$

よって切り口の円の面積S_1は

$$S_1=\pi\left(2-t^2\right)$$

(2) Tと平面βの距離hは、右図より

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)\text{ ゆえ、}$$

切り口の円の半径r_βは

$$r_\beta=\sqrt{2-\frac{3}{4}(1-t)^2}$$

よって、切り口の円の面積S_2は

$$S_2=\pi\left\{2-\frac{3}{4}(1-t)^2\right\}$$

よって、

$$f(t)=\pi\left\{2-t^2+2-\frac{3}{4}(1-t)^2\right\}$$

$$f'(t)=\pi\left\{-2t+\frac{3}{2}(1-t)\right\}=\pi\left\{\frac{3}{2}-\frac{7}{2}t\right\}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{7}$	$\cdots$	1
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

$$f\left(\frac{3}{7}\right)=\pi\left\{4-\frac{9}{49}-\frac{3}{4}\times\frac{16}{49}\right\}$$

$$=\pi\left(4-\frac{9}{49}-\frac{12}{49}\right)=\frac{25}{7}\pi \text{ となる。}$$

$\boxed{6}$

$$\sin(t-x)-\sin 2t = 2\cos\frac{t-x+2t}{2}\sin\frac{t-x-2t}{2}$$

$$=-2\cos\frac{3t-x}{2}\sin\frac{t+x}{2}$$

ここで $0\leqq x\leqq\pi$, $0\leqq t\leqq\pi$ において

$0\leqq\frac{t+x}{2}\leqq\pi$ より $\sin\frac{t+x}{2}\geqq 0$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{3t-x}{2}\leqq\frac{3}{2}\pi$ より　$\frac{3t-x}{2}\leqq\frac{\pi}{2}$ すなわち $t\leqq\frac{x+\pi}{3}$ のとき $\cos\frac{3t-x}{2}\geqq 0$

$t\geqq\frac{x+\pi}{3}$ のとき $\cos\frac{3t-x}{2}\leqq 0$

$0\leqq x\leqq\pi$ で $\frac{\pi}{3}\leqq\frac{x+\pi}{3}\leqq\frac{2\pi}{3}$ より

$$f(x)=-\int_0^{\frac{x+\pi}{3}}\{\sin(t-x)-\sin 2t\}\,dt+\int_{\frac{x+\pi}{3}}^{\pi}\{\sin(t-x)-\sin 2t\}\,dt$$

$$=-\left[-\cos(t-x)+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{x+\pi}{3}}+\left[-\cos(t-x)+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{x+\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=2\left(\cos\frac{-2x+\pi}{3}-\frac{1}{2}\cos\frac{2x+2\pi}{3}\right)-\cos(-x)+\frac{1}{2}\cos 0-\cos(\pi-x)+\frac{1}{2}\cos 2\pi$$

$$=3\cos\frac{2x-\pi}{3}+1$$

$0\leqq x\leqq\pi$ で $-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2x-\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{3}$ より,

$\frac{2x-\pi}{3}=0$ すなわち $x=\frac{\pi}{2}$ のとき 最大値 $3\cdot 1+1=4$

$\frac{2x-\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}$ すなわち $x=0,\pi$ のとき 最小値 $3\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$